

# RAPORT ȘTIINȚIFIC FINAL

privind implementarea proiectului PN-III-P1-1.1-TE-2016-0268, contract 50/2018

Etapa de execuție nr. 3 / 2020

Obiectivele proiectului:

- Ob1. Construirea unui model algebric colectiv bazat pe o metoda generalizata pentru rezolvarea Hamiltonianului Bohr cu cel mai general potential in variabilele de forma ce permite minime multiple in deformare.
- Ob2. Dezvoltarea unor modele exact solubile bazate pe solutii parametrizate ale Hamiltonianului Bohr cu potentiale dependente de energie, pentru o descriere complet geometrica a coexistentei de forme in nuclee pozitionate in apropierea paturilor protonice si neutronice inchise  $Z, N=50$ .

Rezultate estimate:

- Ob1. O descriere consistenta a tranzitiilor de faza in forma nucleara asupra unor regiuni extinse de nuclee si identificarea de noi nuclee drept puncte critice. (4 lucrari)
- Ob2. O generalizare a modelelor asimptotice pentru potentiale dependente de energie cu scopul descrierii unui tip special de coexistenta a formelor nucleare. (2 lucrari)

**Livrabile totale propuse:** 6 lucrari in reviste indexate ISI si participarea la 5 conferinte internationale.

---

1. Pentru realizarea primului obiectiv al etapei am pornit cu expresia generală a Hamiltonianului Bohr:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (1)$$

care este unealta tradițională pentru studierea mișcării nucleare colective asociate gradelor de libertate cvadrupolare. Există indicii experimentale ale unei separări adiabatică dintre fluctuațiile lui  $\beta$  și excitațiile cuplate ale variabilei  $\gamma$  și a unghiurilor Euler. Astfel de condiții colective pot fi modelate cu ajutorul unei forme separate pentru potențial:

$$v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{u(\gamma)}{\beta^2}. \quad (2)$$

Aproximând termenul rotațional al Hamiltonianului Bohr conform condițiilor pentru un nucleu prolate

$$\sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \approx \frac{4}{3} \mathbf{Q}^2 + Q_3^2 \left( \frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right), \quad (3)$$

și mediind ecuația totală pe funcțiile rotaționale, se ajunge la următoarele ecuații pentru variabilele  $\beta$  și  $\gamma$ :

$$\left[ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{W}{\beta^2} + u(\beta) \right] f(\beta) = \epsilon f(\beta), \quad (4)$$

$$\left[ -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{K^2}{4 \sin^2 \gamma} + \frac{L(L+1) - K^2}{3} + u(\gamma) \right] \eta(\gamma) = W \eta(\gamma). \quad (5)$$

Pentru ecuația variabilei  $\gamma$ , am considerat un potențial standard

$$v(\gamma) = b + v_0(\gamma) = b + 2c^2(1 - \cos 3\gamma), \quad (6)$$

modificat însă de contribuția dată de  $b$  care are rolul de a corecta energia de zero a excitațiilor variabilei  $\gamma$ . Această renormare a potențialului  $\gamma$  contribuie direct cu un termen centrifugal  $b/\beta^2$  la ecuația pentru variabila  $\beta$ . Aplicând o aproximație de ordin unu tuturor funcțiilor trigonometrice din ecuația (5) și din expresia lui  $v_0(\gamma)$  în jurul valorii  $\gamma = 0$ , se obține o ecuație diferențială asociată unui oscilator armonic cuantic bidimensional. Soluțiile sunt imediat obținute:

$$W = \frac{L(L+1) - K^2}{3} + 6c(n_\gamma + 1) + b. \quad (7)$$

Parametrul  $d$  este limitat inferior la  $-6c$ . Pentru valori mai mici, contribuția centrifugală totală devine atractivă, situație ce nu este acceptabilă din punct de vedere al mecanicii cuantice. Într-o lucrare precedentă, a fost arătat că pentru nuclee din apropierea punctului critic al unei tranziții de fază a formei, parametrul  $d$  este foarte apropiat de limita sa inferioară. Când  $d = -6c$ , termenul cinetic total al ecuației în variabila  $\beta$  capătă o formă asemănătoare cu a binecunoscutului model  $X(5)$  al punctului critic pentru tranziția de fază în nuclee  $\gamma$ -stabile. Totuși, în modelul  $X(5)$  separarea ce conduce la această formă a termenului cinetic este datorată unei aproximații foarte crude. Deasemenea, stările benzii  $\gamma$  sunt calculate diferit deoarece în modelul prezent variabila  $\gamma$  este încă cuplată la variabila  $\beta$  prin intermediul contribuției centrifugale, în timp ce în formalisme de tipul  $X(5)$ , întreaga contribuția  $\gamma$  este aditivă. Având în vedere că fenomenul de coexistență a formelor nucleare este inevitabil și strâns legat de punctele critice ale tranzițiilor de fază referitoare la formă, în acest studiu a fost aplicat doar cazul limită  $d = -6c$ .

Datorită separării variabilei  $\beta$ , acum potențialul asociat acesteia este constrâns de simetria modelului Bohr-Mottelson să fie un polinom în  $\beta^2$ . Cel mai simplu potențial care poate să aibă simultan două minime este potențialul sextic:

$$v(\beta) = a\beta^2 + b\beta^4 + c\beta^6. \quad (8)$$

Ecuația diferențială (4) pentru un astfel de potențial are anumite proprietăți de scalare ce conduc la următoarea echivalență dintre energiile proprii pentru o anumită relație între parametrii potențialului:

$$\epsilon^\beta(a, b, c) = a^{1/2} \epsilon^\beta(1, ba^{-3/2}, ca^{-2}). \quad (9)$$

Astfel, pentru a determina în mod unic spectrele energetice pentru un potențial sextic, este suficient să rezolvăm ecuația (4) doar pentru potențialul:

$$v(\beta) = \beta^2 + \mu\beta^4 + \nu\beta^6. \quad (10)$$

Acest potențial scalat are două minime doar dacă  $\mu < 0$  și  $\nu > 0$ . Acestea sunt poziționate în

$$\beta_{min} = \begin{cases} 0, \\ \sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2 - 3\nu - \mu}}{3\nu}}, \end{cases} \quad (11)$$

Pentru rezolvarea ecuației (4) am dezvoltat funcția de undă într-o serie de tip Fourier-Bessel. Mai întâi de toate, condiția la limită obișnuită

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Psi(\beta) = 0 \quad (12)$$

este înlocuită cu

$$\Psi(\beta_W) = 0, \quad (13)$$

unde  $\beta_W$  este o limită finită a cărui valoare este fixată astfel încât să cuprindă aspectele relevante ale problemei. Această schimbare a condiției de limită ne oferă posibilitatea de a folosi funcții Bessel de ordinul unu ca stări ale bazei de diagonalizare a ecuației Schrödinger de tip radial (4). Pentru definirea bazei însă, trebuie mai întâi rezolvată problema pentru mișcarea liberă în potențialul de tip groapă dreptunghiulară a cărui perete infinit este poziționat la limita finită  $\beta_W$  menționată mai sus:

$$\tilde{v}(\beta) = \begin{cases} 0, \beta \leq \beta_W \\ \infty, \beta > \beta_W. \end{cases} \quad (14)$$

Folosind acest potențial în (4), se obține următoarea ecuație diferențială:

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{4}{\beta^2} + \frac{L(L+1)}{3\beta^2} \right] \tilde{\Psi}(\beta) = \lambda \tilde{\Psi}(\beta). \quad (15)$$

Soluțiile normate ale acestei ecuații

$$\tilde{\Psi}_{\nu n}(\beta) = \frac{\sqrt{2}\beta^{-\frac{3}{2}} J_{\nu}(\alpha_n \beta / \beta_W)}{\beta_W J_{\nu+1}(\alpha_n)}, \quad (16)$$

sunt proporționale cu funcțiile Bessel de ordin unu  $J_{\nu}$ . Argumentul  $\nu$  este definit de

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{L(L+1)}{3}}, \quad (17)$$

în timp ce  $\alpha_n = \beta_W \lambda$  sunt zerourile funcției Bessel indexate de  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Aceste funcții sunt ortonormate și considerate mai departe ca bază de diagonalizare pentru problema inițială a ecuației (4), astfel încât funcția de undă totală poate fi scrisă ca o dezvoltare în termeni de funcțiile proprii (16):

$$\Psi_{Lk}(\beta) = \sum_n^{n_{max}} A_n^k \tilde{\Psi}_{\nu n}(\beta), \quad (18)$$

unde  $k$  distinge soluțiile de diagonalizare, iar  $n_{max}$  este o dimensiune finită a bazei de diagonalizare. Pentru a determina complet baza de diagonalizare este nevoie de fixarea atât a dimensiunii de trunchiere cât și a valorii de limită  $\beta_W$ . Cea din urmă depinde atât de stare cât și de dimensiunea bazei. Există însă o valoare minimă pentru fiecare dimensiune ce satisface cerințele de precizie pentru o anumită stare. Deasemenea valoarea minimă este mai mare pentru stări energetice mai înalte. Deci mai întâi de toate se stabilește o limită a preciziei și o anumită dimensiune a bazei de diagonalizare. Mai departe, valoarea de limită  $\beta_W$  se stabilește astfel încât prin creșterea semnificativă a acesteia, energia ultimei stări energetice considerate în aplicații și obținute în urma diagonalizării să nu se modifice mai mult decât precizia presetată. Convergența energiilor stărilor mai joase va fi astfel automat satisfăcută. Acest lucru a fost testat individual pentru fiecare stare. Pentru calculele numerice efectuate în cadrul acestei etape a fost folosită o bază de dimensiunea  $n_{max} = 20$  și o precizie minimă de  $10^{-7}$  pentru energia absolută a stării  $L = 20$  din prima bandă  $\beta$  excitată.

Elementele de matrice ale Hamiltonianului asociat ecuației diferențiale (4) în baza funcțiilor (16) sunt date de:

$$H_{nm} = \left( \frac{\alpha_n}{y_W} \right)^2 \delta_{nm} + \frac{2 \sum_{i=1}^3 v_i (y_W)^{2i} I_{nm}^{(\nu,i)}}{q^2 J_{\nu+1}(\alpha_n) J_{\nu+1}(\alpha_m)}, \quad (19)$$

unde  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = \mu$  și  $v_3 = \nu$ . Pentru determinarea integralelor

$$I_{nm}^{(\nu,i)} = \int_0^1 x^{2i+1} J_\nu(\alpha_n x) J_\nu(\alpha_m x) dx, \quad x = \beta/\beta_W, \quad (20)$$

s-au folosit relații de recurență corespunzătoare ce optimizează semnificativ calculul numeric al acestora. Energiile pentru anumite valori ale parametrilor  $\mu$  și  $\nu$  și un moment cinetic  $L$  fixat obținute din procedura de diagonalizare sunt indexate de  $k$  și corespund la stări de moment cinetic  $L$  ce fac parte din diferite benzi  $\beta$  vibraționale. Astfel cea mai joasă stare constituie un nivel din banda fundamentală, următoarea stare aparține primei benzi  $\beta$  excitate și așa mai departe. Procedura de diagonalizare deasemenea oferă și componentele vectorilor proprii corespunzători fiecărei stări ce definesc de fapt coeficienții dezvoltării (18).

Impunând restricții suplimentare pentru potențialul sextic corespunzătoare unor cerințe fenomenologice necesare, atât potențialul cât și întregul formalism al modelului se poate restrânge la dependența de un singur parametru liber. În una din lucrările raportate, potențialul sextic a fost constrâns să aibă două minime degenerate. În acest caz, s-a determinat relația necesară ce trebuie îndeplinită între parametrii inițiali  $\mu$  și  $\nu$ , din care s-a extras un nou parametru care definește comportarea completă a unui astfel de sistem. Era de așteptat ca pentru un astfel de potențial, densitatea de probabilitate

$$\rho_{Ln_\beta}(\beta) = |\Psi_{Ln_\beta}(\beta)|^2 \beta^4 \quad (21)$$

pentru starea fundamentală să fie împărțită între cele două minime cu câte un maxim în fiecare.

Contrar așteptărilor, rezultatele au arătat doar indicii ale unei fragmentări ale densității de probabilitate  $\beta$  în starea fundamentală fără maxime multiple. Indicații mai puternice ale prezenței a două minime degenerate în potențial au fost identificate însă în comportarea densității de probabilitate a primii stări  $\beta$  excitate. Motivul pentru această inhibare a signaturilor de coexistență a formelor asociate celor două minime constă în faptul că mai există o contribuție centrifugală la potențial ce vine de la termenul multidimensional al energiei cinetice din Hamiltonianul Bohr. Aceasta are efectul de ridicare și deplasare a minimumului sferic, astfel încât importanța acestuia este substanțial diminuată. Acest lucru poate fi observat atunci când funcția de undă totală este schimbată cu  $\psi(\beta) = \Psi(\beta)/\beta^2$ . Ecuația diferențială (4) pentru noua funcție se prezintă atunci sub forma unei ecuații Schrödinger unidimensionale:

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + v_{eff}(\beta) \right] \psi(\beta) = \epsilon^\beta \psi(\beta), \quad (22)$$

al cărei potențial efectiv este exprimat ca

$$v_{eff}^L(\beta) = \frac{L(L+1)+6}{3\beta^2} + \beta^2 + \mu\beta^4 + \nu\beta^6. \quad (23)$$

După cum se poate vedea, chiar și pentru stările cu  $L = 0$  (inclusiv starea fundamentală), contribuția centrifugală adițională ce a fost menționată mai sus nu dispăre și își păstrează efectul de ridicare și mutare a minimumului sferic din potențialul sextic original. În consecință, chiar dacă potențialul sextic original are două minime degenerate ca energie, cel sferic poate dispărea din potențialul efectiv chiar și al stării fundamentale pentru anumite valori ale parametrilor  $\mu$  și  $\nu$ , unde doar unul din ei este independent. Această problemă a fost discutată în cea de a doua lucrare publicată raportată pentru această etapă. În lucrarea menționată s-a optat pentru un potențial sextic constrâns astfel încât potențialul efectiv pentru  $L = 0$  să prezinte două minime degenerate. Chiar dacă prezența unei noi condiții pentru potențialul sextic original, reduce problema la un singur parametru independent, o relație analitică între cei doi parametri nu există. Folosind totuși o corespondență numerică între cei doi parametri s-au realizat calcule pentru câteva astfel de cazuri. Efectul barierei asupra nivelelor energetice și a densităților de probabilitate corespunzătoare stării fundamentale și primei stări  $\beta$  excitate a fost studiat cu ajutorul figurii 1.

Restricția de a avea minime degenerate pentru potențialul efectiv face ca bariera separatoare să-și varieze în același timp atât înălțimea cât și grosimea. Am observat astfel că pentru bariere foarte mari, stările benzii fundamentale sunt complet separate de cele din banda  $\beta$  excitată. Într-adevăr, distribuția de probabilitate pentru stările  $L = 0$  din cele două benzi au ambele un singur vârf localizat în una din gropile potențialului efectiv. Micșorând treptat înălțimea și grosimea barierei, devine posibilă tunelarea dintre cele două gropi de potențial, astfel încât densitatea de probabilitate a stării fundamentale începe să se "scurgă" și în minimumul mai puțin deformat. La un moment dat, aceasta capătă o formă cu două vârfuri, ceea ce este exact comportarea de coexistență

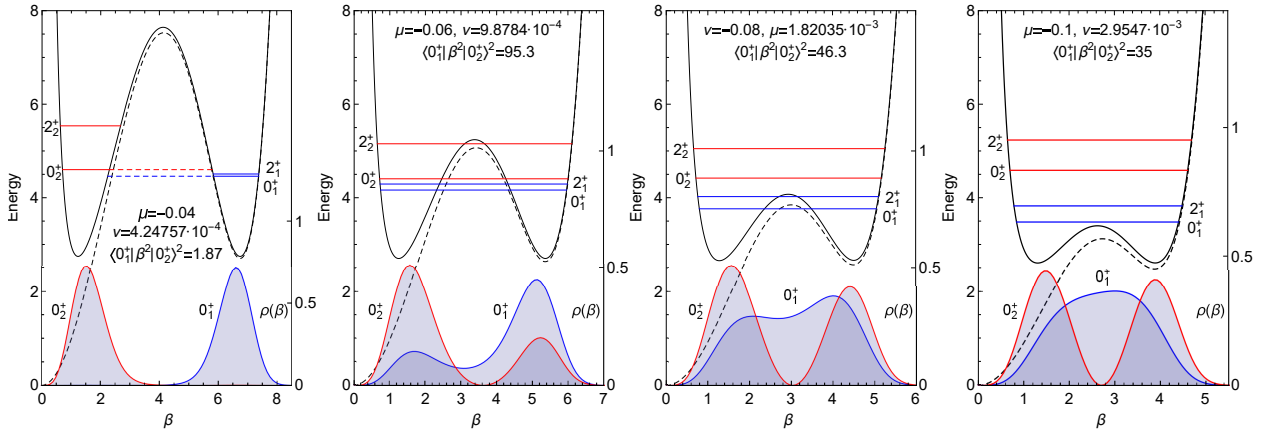


Figure 1: Potențialul efectiv (linie solidă) și cel original (linie întreruptă) precum și distribuția densității de probabilitate corespunzătoare stării fundamentale și primei stări  $\beta$  excitate, sunt reprezentate ca funcție de variabila de deformare  $\beta$ . Primele două nivele energetice din fiecare bandă sunt deasemenea vizualizate în aceleași unități absolute ca și potențialele.

a formelor nucleare în starea fundamentală. Dacă bariera separatoare este micșorată și mai mult, cele două vârfuri din distribuția de probabilitate a stării fundamentale se vor contopi într-unul singur dar extins peste cele două minime ale potențialului efectiv. Acesta din urmă este un exemplu de fluctuație a formei nucleare asociate unor nuclee critice pentru tranziția de fază cuantică dintre formele nucleare deformate și cele sferice. Astfel, cazurile considerate în figura 1, reprezintă o evoluție fenomenologică a comportării unui sistem ce prezintă două configurații de deformare distincte reprezentate de cele două minime ale potențialului efectiv. Păstrând ordinea din figura 1, avem cazul unor forme coexistente complet separate fără interacție, apoi avem o coexistență de forme cu interacție puternică, și în sfârșit avem o trecere treptată către o fluctuație a formei nucleare extinsă peste ambele minime cu ignorarea completă a barierei separatoare.

Ca exemplu al coexistenței de forme cu interacție puternică, a fost găsit nucleul  $^{76}\text{Kr}$ . Fitarea spectrului său energetic cu ajutorul modelului propus a oferit parametrii  $\mu = -0.07314$  și  $\nu = 1.5062 \cdot 10^{-3}$  ce definesc un potențial efectiv cu două minime aproape degenerate, și cu o stare fundamentală a cărei densitate de probabilitate prezintă clar două vârfuri. Un acord surprinzător de bun a fost obținut pentru probabilitățile de tranziție  $E2$  ce leagă stări din diferite benzi vibraționale. La fel de bine este reprodusă și puterea tranziției monopolare  $E0$  ce leagă stările  $L = 0$  din banda fundamentală și banda  $\beta$  excitată. Acest lucru atestă corectitudinea modelului în ceea ce privește interacția puternică dintre minimele potențialului atunci când se așteaptă o fragmentare a stării fundamentale.

În concluzie, a fost construită o metodă de diagonalizare eficientă a Hamiltonianului Bohr cu potențiale ce posedă două minime. Implicațiile celor două minime în fenomenologia mișcării nu-

cleare colective a fost studiată în detaliu cu validarea acestora cu exemple ale realizării acestora în nuclee reale. Rezultatul principal este totuși obținerea pentru prima dată a unei stări fundamentale ce are distribuția de probabilitate de localizare a deformării împărțită în două vârfuri corespunzătoare la două deformări diferite simultan [1].

Formalismul a fost aplicat pentru fitarea energiilor acestor benzi observate în nucleele  $^{72,74,76}\text{Se}$  [5], ce sunt cunoscute pentru comportarea lor ce sugerează o coexistență a formelor. Calitatea fiturilor este dată de valorile foarte mici ale abaterii standard dar este evidentă și din acordul general dintre spectrele teoretice și experimentale ce sunt comparate în Fig.2. Acest aspect susține alegerea modelului pentru descrierea acestor nuclee, care pe deasupra este capabil să descrie și starea excitată  $0^+$  foarte joasă în energie. Este de asemenea de notat faptul că calculele teoretice reproduc foarte fidel anomalia de moment cinetic mic observată în  $^{72}\text{Se}$ , ce se referă la faptul că energia de excitație a stării  $2_g^+$  este considerabil mai mică decât diferența de energie  $E(4_g^+) - E(2_g^+)$ , după care diferențele energetice dintre nivele succesive crește monoton odată cu spinul.

Primele indicii referitoare la efectele de coexistență și amestec al formelor sunt extrase chiar din forma rezultată a potențialelor cu două minime vizualizată pentru fiecare nucleu în Fig.3. O opinie mai informată este obținută din investigarea potențialelor efective dependente de stare datorită contribuției centrifugale incluse dar și din distribuția probabilității de deformare asociată acestor stări. Toate aceste mărimi pot fi accesate din Fig.2. O astfel de analiză a arătat că potențialele efective își mențin structura cu două gropi doar până la momentul cinetic  $L = 4$  în benzile cu  $K = 0$ . Totodată, din aceiași Fig.2, se pot observa instanțe cu amestec de forme doar pentru primele două stări ale benzii fundamentale. Vizualizarea distribuției de probabilitate a deformării pentru aceste stări a scos la iveală o tranziție dinamică referitoare la forma nucleelor studiate ce are loc de la deformări mici ale stării fundamentale la stări excitate cu deformare mare. De asemenea, această tranziție se întâmplă cu un grad mare de amestec al formelor ce culminează cu o comportare de tipul unei fluctuații a formei nucleare pentru nucleul  $^{76}\text{Se}$ .

Parametrii fiți ai potențialului pentru variabila  $\beta$  sunt de asemenea validați prin verificarea acordului dintre stările  $\gamma$  prezise teoretic și cele accesibile experimental. Se constată ca în general acordul cu experimentul pentru stările benzii  $\gamma$  este comparabil cu cel pentru stările  $K = 0$ , chiar dacă acestea din urmă nu au fost incluse în fitare. În mod similar, tranzițiile cvadripolare calculate oferă un acord rezonabil cu datele experimentale. O reproducere foarte bună a tranzițiilor măsurate este raportată pentru nucleul  $^{76}\text{Se}$ . În ceea ce privește observabilele  $\rho^2(E0)$  și  $X(0/2)$  asociate tranziției monopolare, calculele teoretice din nou sunt apropiate valorilor experimentale. Succesul major al acestei descrieri constă în reproducerea corectă a tranzițiilor considerabil mărite ( $E0$  și  $E2$ ) dintre stările benzii  $\beta$  excitate și stările din banda fundamentală. Acest rezultat nu poate fi obținut cu soluțiile obișnuite ale modelului Bohr, care inhibă puternic exact aceste tranziții.

Reproducerea teoretică a unor semnături spectrale cum ar fi energia joasă a primelor stări din

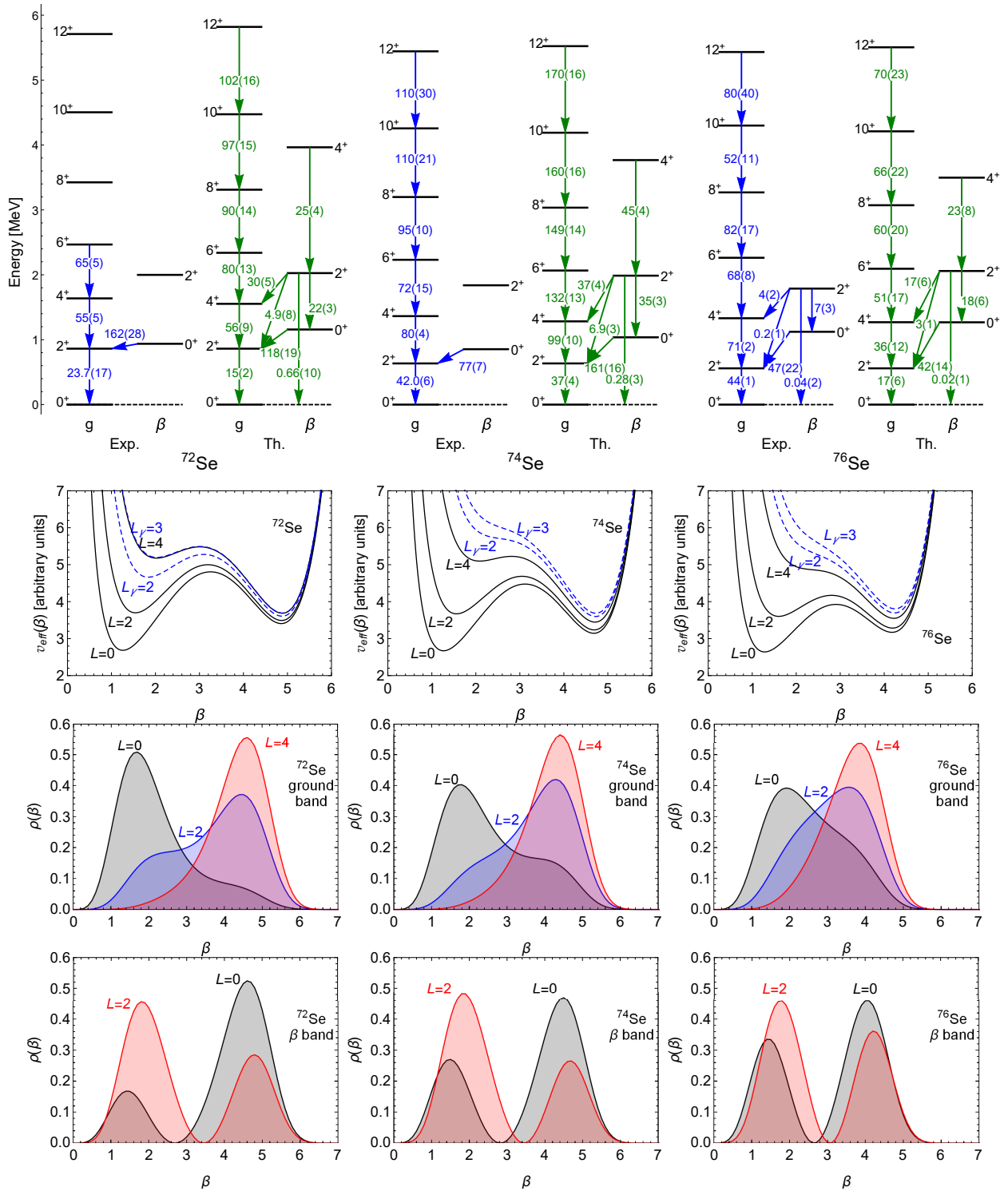


Figure 2: În primul rând sunt comparate rezultatele teoretice cu datele experimentale pentru energiile din banda fundamentală și prima bandă  $\beta$  excitată, precum și tranzițiile  $E2$  asociate pentru nucleele  $^{72,74,76}\text{Se}$ . Energiile sunt date în MeV, iar tranzițiile electromagnetice în unități Weisskopf. Rândurile următoare prezintă pentru fiecare nucleu potențialele efective relativ la nivelele energetice calculate, distribuțiile de probabilitate a deformării pentru stările  $L = 0, 2, 4$  din banda fundamentală și respectiv pentru stările  $\beta$  excitată cu  $L = 0$  și  $L = 2$ .



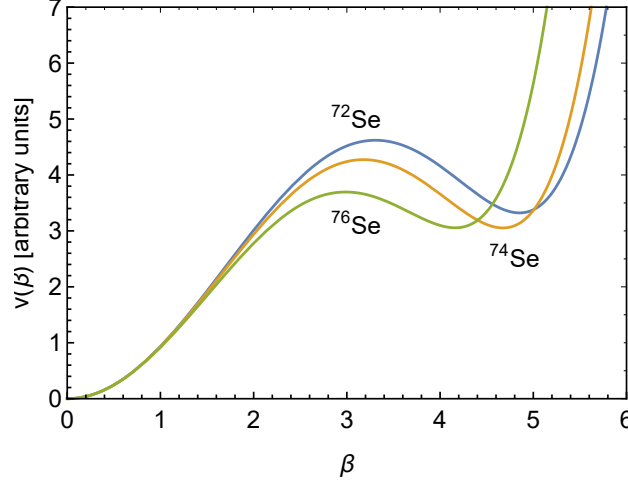


Figure 3: Potențialul în  $\beta$  folosit în calculele pentru nucleele  $^{72,74,76}\text{Se}$ .

banda  $\beta$  și banda  $\gamma$  sau tranzițiile interbandă monopolare și cvadrupolare mărite, demonstrează capacitatea descrierii fenomenologice a coexistenței formelor și a evoluției acestora de-a lungul unei tranziții de fază. Ingredientul esențial al unei astfel de abordări este folosirea unui potențial cu două gropi, dar și reprimarea contribuției centrifugale trebuie luată în considerare.

Proprietățile ecuației Schrödinger pentru un potențial cu două minime degenerate au fost deasemenea folosite și pentru descrierea simetriei chirale realizate în nuclee impar-impare. Hamiltonianul colectiv în acest caz este construit printr-o procedură semiclassicală și este asociat unui spațiu unidimensional asociat la o variabilă chirală. Eforturile analitice cât și numerice în această direcție s-au materializat printr-o altă lucrare [2].

Un program similar a fost realizat și pentru cazul  $\gamma$ -instabil [6], unde am considerat stările modelului  $E(5)$  ca bază pentru diagonalizarea Hamiltonianului Bohr:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\hat{\Lambda}^2}{\beta^2} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (24)$$

unde

$$\hat{\Lambda}^2 = -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{L}_k^2}{4 \sin^2(\gamma - 2\pi k/3)}, \quad (25)$$

este operatorul Casimir  $SO(5)$ . Ecuația de vectori și valori proprii pentru acest operator este dată de:

$$\hat{\Lambda}^2 \mathcal{Y}_{\tau\alpha LM}(\gamma, \Omega) = \tau(\tau + 3) \mathcal{Y}_{\tau\alpha LM}(\gamma, \Omega), \quad (26)$$

unde  $\mathcal{Y}_{\tau\alpha LM}(\gamma, \Omega)$  sunt funcții armonice sferice de tip  $SO(5)$ , având ca indici numărul de senioritate  $\tau$ , momentul cinetic total intrinsec  $L$ , respectiv proiecția sa  $M$  pe axa 3 în sistemul de referință al laboratorului, dar și un indice adițional  $\alpha$  care distinge între stări degenerate în raport cu  $\tau$  și  $L$ . Prin  $\Omega$  s-au notat cele trei unghiuri Euler  $\theta_1, \theta_2$  și  $\theta_3$  ce descriu rotația sistemului. Pentru cazul în

care nucleul în starea sa fundamentală are o deformare  $\gamma$ -instabilă, potențialul Hamiltonianului (24) este independent de variabila  $\gamma$  și drept urmare se poate face o separare exactă a variabilei  $\beta$  de celelalte variabile  $\gamma$  și  $\Omega$ :

$$\left[ -\frac{d^2}{d\beta^2} + \frac{\tau(\tau+3)+2}{\beta^2} + u(\beta) \right] R_{\xi,\tau}(\beta) = \varepsilon R_{\xi,\tau}(\beta), \quad (27)$$

unde  $u(\beta) = \frac{2B}{\hbar^2} V(\beta)$  și  $\varepsilon = \frac{2B}{\hbar^2} E$ , iar  $\xi$  este un număr cuantic asociat vibrației de tip  $\beta$ . În studiul prezent, pentru Ec.(27), am considerat un potențial sextic de forma:

$$u(\beta) = \beta^2 - a\beta^4 + b\beta^6, \quad (28)$$

care prezintă simultan un minim sferic și unul deformat atunci când sunt îndeplinite condițiile  $b > 0$  și  $a^2 > 3b$ . Pentru un astfel de potențial, ca bază de diagonalizare sunt alese soluțiile modelului  $E(5)$  corespunzătoare unui potențial de tip groapă dreptunghiulară infinită:

$$\tilde{R}_{\tau n}(\beta) = \frac{\sqrt{2}\beta^{-\frac{3}{2}} J_\nu(z'_n \beta / \beta_W)}{\beta_W J_{\nu+1}(z'_n)}, \quad \nu = \tau + \frac{3}{2}, \quad (29)$$

unde  $J_\nu$  sunt funcții Bessel de speța I-a împreună cu zerourile asociate  $z'_n$ ,  $\beta_W$  reprezintă distanța la care este poziționat peretele potențialului groapă dreptunghiulară infinită, iar  $n_{max}$  este dimensiunea bazei. Astfel, pentru funcțiile în variabila  $\beta$  avem următoarea expresie

$$R_{\xi\tau}(\beta) = \sum_{n=1}^{n_{Max}} A_n^\xi \tilde{R}_{\tau n}(\beta), \quad (30)$$

ai căror coeficienți  $A_n^\xi$  sunt determinați din diagonalizarea matricii Hamiltonianului,

$$H_{nm} = \left( \frac{z'_n}{\beta_W} \right)^2 \delta_{nm} + \frac{2 \sum_{i=1}^3 q_i \beta_W^{2i} I_{nm}^{(\nu\nu, 2i)}}{J_{\nu+1}(z'_n) J_{\nu+1}(z'_m)}, \quad q_1 = 1, q_2 = -a, q_3 = b, \quad (31)$$

unde

$$I_{nm}^{(\nu\mu, k)} = \int_0^1 x^{k+1} J_\nu(z'_n x) J_\mu(z'_m x) dx, \quad x = \beta / \beta_W. \quad (32)$$

Având funcțiile de undă determinate, se pot calcula mai departe densitatea probabilității de distribuție a deformării  $\rho_{\xi\tau}(\beta) = [R_{\xi\tau}(\beta)]^2 \beta^4$ , probabilitatea de tranziție monopolară  $\rho_{i,f}^2(E0) \sim \langle R_{\xi_i \tau_i} | \beta^2 | R_{\xi_f \tau_f} \rangle$ , respectiv probabilitatea de tranziție cvadrupolară  $B(E2)$  folosind operatorul de tranziție:

$$T_\mu^{(E2)} = t\beta \left[ D_{\mu,0}^2(\Omega) \cos \gamma + \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}} (D_{\mu,2}^2(\Omega) + D_{\mu,-2}^2(\Omega)) \right], \quad (33)$$

unde  $t$  este un parametru de scalare, iar  $D_\mu(\Omega)$  sunt matrici Wigner. Astfel, în Fig. 4 sunt prezentate densitatea probabilității de distribuție a deformării ( $\beta_2$ ) pentru starea fundamentală (b) și prima stare excitată  $0^+$  (c), respectiv potențialul efectiv

$$u_{eff}(\beta) = \frac{\tau(\tau+3)+2}{\beta^2} + \beta^2 - a\beta^4 + b\beta^6 \quad (34)$$

pentru  $\tau = 0$  corespunzător acestor stări (a). În această figură, potențialul efectiv pentru  $\tau = 0$  este constrâns să aibă cele două minime degenerate, ceea ce rezultă într-o nouă condiție impusă parametrilor  $a$  și  $b$  și drept urmare, conduce la o relație de dependență între acești parametri  $a = f(b)$ . În aceste condiții, în Fig. 4(a), potențialul evoluează de la o barieră înaltă și îngustă către o barieră joasă și de lărgime mare în raport cu creșterea lui  $a$ . În ceea ce privește densitatea distribuției de probabilitate a deformării, observăm că pentru valori mici ale lui  $a$ , când bariera este foarte înaltă, deformarea pentru starea fundamentală și prima stare excitată  $0^+$  este restrânsă în jurul minimumului cu deformare mai mare, respectiv, celui cu deformare mai mică. Mai mult, datorită înălțimii foarte mari a barierei, aceste stări, cât și stările excitate joase de deasupra lor, nu interacționează între ele, iar vibrația  $\beta$  întâlnită de obicei la banda corespunzătoare primei stări excitate  $0^+$  este aproape inexistentă. Această situație, corespunde foarte bine definiției general acceptate în domeniu pentru fenomenul de coexistență a formelor. În schimb, crescând valoarea lui  $a$ , cele două benzi încep să interacționeze datorită efectului de tunelare a barierei și să avem două vârfuri pentru densitatea probabilității de distribuție a deformării pentru cele două stări  $0^+$ . Apariția celui de-al doilea vârf pentru prima stare  $0^+$  excitată este pus pe seama faptului că funcția de undă asociată are un nod caracteristic vibrației  $\beta$ , care acum se poate manifesta datorită barierei mai joase. În schimb, pentru starea fundamentală pentru care nu avem niciun nod, explicația este că avem o coexistență a formelor în aceeași stare sau o coexistență cu amestec al formelor, după cum mai este cunoscută în domeniu. În cele din urmă, când bariera este sub nivelul energetic al stării fundamentale, avem un singur vârf aplatizat pentru starea fundamentală, în timp ce caracterul de capăt de bandă  $\beta$  este redobândit de prima stare  $0^+$  excitată. Această situație corespunde fluctuației de forme întâlnită în punctul critic al tranziției de fază de la o formă sferică la una deformată. În cadrul aceluiași studiu, spectrul energetic, precum și probabilități de tranziție electromagnetică, sunt calculate de asemenea în acord cu relația  $a = f(b)$ , remarcând că modelul prezent poate să descrie o tranziție de la  $O(6)$  la  $E(5) - \beta^6$  în raport cu aceste mărimi. Această tranziție este foarte bruscă și se petrece în apropierea lui  $a \approx 0.05$ . De asemenea, elementul de matrice monopolar are un maxim în acest punct critic de tranziție  $a \approx 0.05$ , fiind în acord cu amestecul mare dintre cele două deformări. În toată această analiză, baza de diagonalizare a fost trunchiată la  $n_{Max} = 30$ , ceea ce asigură o convergență a energiilor de ordinul  $10^{-7}$ .

Această analiză a arătat faptul că gradul de coexistență a formelor este determinat de tunelarea permisă prin bariera separatoare și poate fi estimată mai precis cu ajutorul unor observabile relevante asociate tranzițiilor electromagnetice. Acestea din urmă au comportări specifice și ușor de identificat în zona punctelor critice ale unei tranziții de fază. Se constată că efectul este dependent de stare, astfel încât se pot obține stări distincte în același nucleu cu proprietăți de deformare radical diferite ce sunt conectate printr-o tranziție de fază dinamică în forma nucleară de tip Jacobi.

În concluzie, folosind un potențial colectiv cu două minime într-un Hamiltonian Bohr feno-

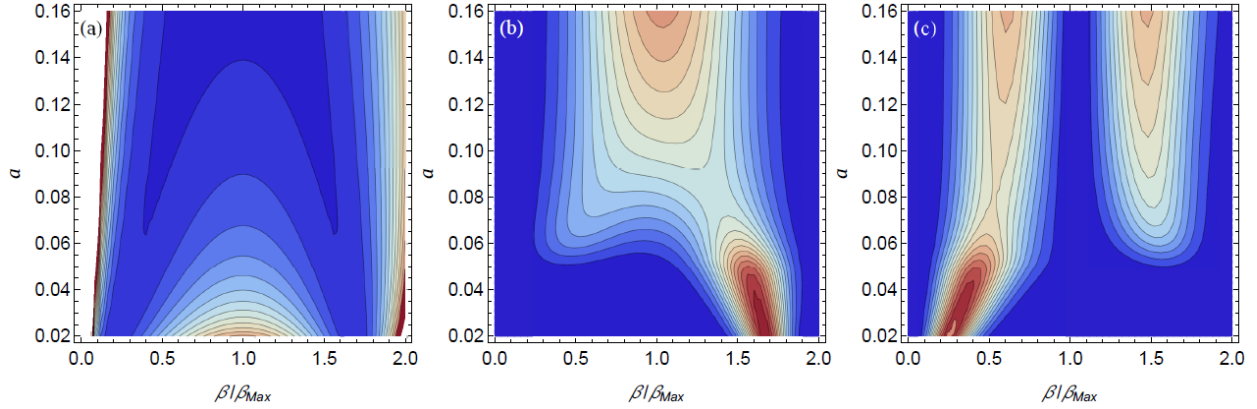


Figure 4: Evoluția dependenței de  $\beta$ , a potențialului efectiv pentru  $\tau = 0$  cu minime degenerate (a), precum și a densității de probabilitate de deformare corespunzătoare stării fundamentale (b) și primei stări  $0^+$  excitate, ca funcție de parametrul  $a$  corelat cu celălalt parametru  $b$  prin condiția de minime degenerate. Pentru o vizualizare mai bună, dependența de  $\beta$  este scalată la poziția vârfului barierei separatoare a potențialului efectiv în fiecare valoare a lui  $a$ .

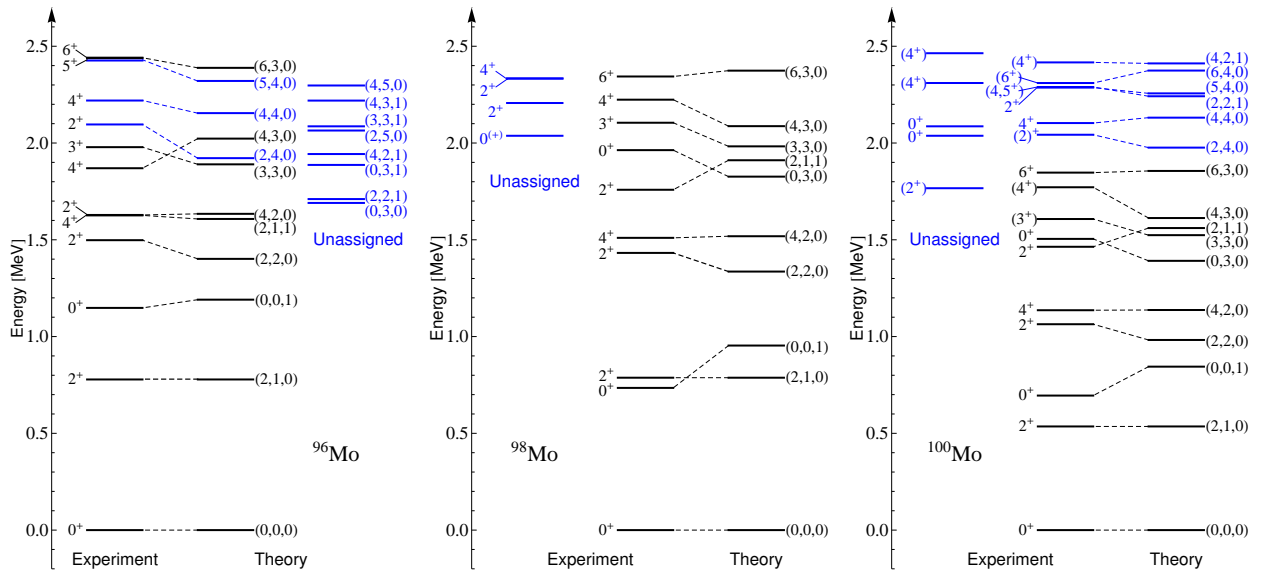


Figure 5: Spectrul complet de energie joasă oferit de măsurători experimentale și de modelul prezent pentru  $^{96,98,100}\text{Mo}$ . Stările sunt indexate de  $(L, \tau, \xi)$ . Doar nivelele de culoare neagră au fost incluse în procedura de fitare.

menologic, a fost posibilă modelarea diverselor aspecte legate de deformare cum ar fi amestecul de forme, coexistența de forme, fluctuația formei nucleare, tranziții de fază între stări excitate sau generate de rotație. Aceste efecte sunt regăsite în dinamica complexă a mai multor nuclee, inclusiv cele prezentate în continuare.

Formalismului prezentat pentru cazul  $\gamma$ -instabil a fost aplicat cu succes pentru descrierea spectrelor de energie joasă la trei nuclee de Mo, suspectate de coexistență de forme. Cele trei nuclee sunt  $^{96,98,100}\text{Mo}$ . Degenerarea după moment cinetic datorată simetriei  $SO(5)$  este ruptă într-o manieră ce sugerează o  $\gamma$ -instabilitate aproximativă cu o creștere monotonică în energie a stărilor cu moment cinetic mai mare. Pentru a avea însă o reproducere cât mai fidelă a datelor experimentale, Hamiltonianul model (24) este modificat prin adăugarea termenului  $\hat{L}^2$  ce conservă simetria Hamiltonianului inițial dar totodată despică multipletul energetic pentru o valoare dată a lui  $\tau$ . Acest lucru este posibil deoarece, pe lângă  $\Lambda^2$ , armonicile sferice  $SO(5)$  sunt stări proprii și pentru  $\hat{L}^2$  și  $\hat{L}_3$ . Termenul aditional  $\hat{L}^2$  poate fi introdus și prin redefinirea momentelor de inerție. Astfel, energiile finale au fost calculate cu formula

$$E_{L\tau\xi}^{tot}(a, b, c) = \frac{\hbar^2}{2B} \left[ E_{\tau\xi}^{diag}(a, b) + cL(L + 1) \right], \quad (35)$$

unde  $E_{\tau\xi}^{diag}(a, b)$  este energia obținută din diagonalizare. Ghidați de distribuția teoretică a stărilor pentru  $\xi = 0$  cu  $\tau = 0, 1, 2, 3$  și  $\xi = 1$  cu  $\tau = 0, 1$ , au fost mai întâi identificate corespondențele lor experimentale ce au fost ulterior fitate cu formulele teoretice pentru a obține cei trei parametri liberi  $a, b$  și  $c$  ce produc cea mai mică abatere standard dintre teorie și experiment. Astfel, pentru  $^{96}\text{Mo}$  au fost considerate 8 stări, iar pentru  $^{98}\text{Mo}$  și  $^{100}\text{Mo}$  9 stări. Fitarea a fost limitată doar la aceste stări, deoarece doar acestea pot fi repartizate fără dubii datelor teoretice ale modelului bazându-se pe alocarea experimentală pe benzi, tranziții puternice în cascadă ce sunt consistente cu secvențe rotaționale, precum și ținând cont de regulile de selecție teoretice. Energiile calculate sunt considerate în raport cu starea fundamentală asociată energiei zero. De asemenea, în futuri, energiile de excitație experimentale și teoretice sunt normate la energia de excitație a primei stări  $2^+$ . În acest fel este eliminată dependența de scală a modelului. Valorile absolute ale energiilor sunt recuperate prin multiplicarea rezultatelor scalate cu cantitatea  $\hbar^2/(2B)$ , care reproduce valoarea experimentală a stării  $2_1^+$ . În calculele teoretice am considerat doar o singură cantă de excitație  $\beta$ , care după cum se poate vedea din Fig.2 acoperă în mare parte tot spectrul energetic de energie joasă și paritate pozitivă al nucleelor considerate. Din aceeași figură se poate estima și acordul rezultatelor teoretice cu experimentul. De exemplu, raportul  $R_{4/2}$  dintre energiile de excitație ale primelor stări  $2^+$  și  $4^+$  este foarte bine reprodus pentru toate nucleele. În schimb poziția primei stări excitate  $0^+$  este puțin supraestimată pentru toate nucleele cu aproximativ același procentaj. Parametrii fițați intervin în funcțiile de undă ce sunt folosite pentru calculul tranzițiilor electromagnetice monopolare și cvadrupolare. Pentru valori absolute ale acestor observabile este nevoie de fixarea unui alt parametru de scală  $\beta_M$  ce face legătura între variabila de deformare  $\beta$  și obișnuita măsură a deformării cvadrupolare nucleare. Deci  $\beta_M$  este fixat astfel încât să reproducă probabilitatea de tranziție experimentală  $B(E2; 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)$ .

După cum se poate vedea, fiturile asupra energiilor sunt foarte bune, având în vedere com-

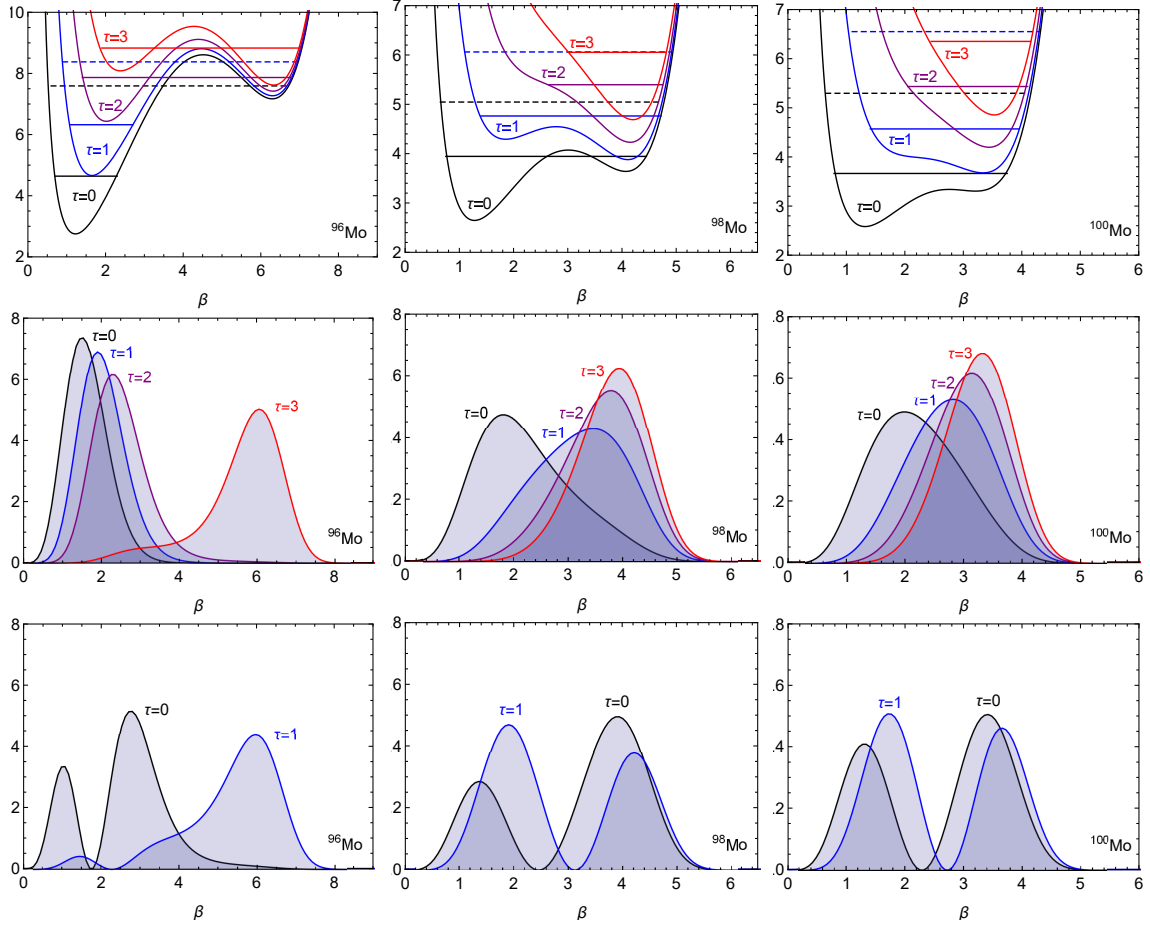


Figure 6: Potențialul efectiv, precum și densitatea de probabilitate de deformare corespunzătoare stărilor benzii fundamentale cu  $\tau = 0, 1, 2, 3$  și stărilor  $\beta$  excitate cu  $\tau = 0, 1$  sunt vizualizate ca funcție de deformarea cvadrupolară  $\beta_2 = \beta\beta_M$  pentru nucleele  $^{96,98,100}\text{Mo}$ . Nivelele energetice sunt notate cu linie plină pentru stările cu  $\xi = 0$ , și cu linie întreruptă pentru  $\xi = 1$

plexitatea spectrelor fitate. Mai mult de atât, rezultatele fitărilor oferă și un acord rezonabil cu datele experimentale pentru proprietățile electromagnetice prezise teoretic. Potențialele efective obținute cu parametrii fitați prezintă profile cu două minime și sugerează o evoluție dinamică în cadrul celor trei izotopi. De exemplu, Fig.6 arată că înălțimea barierei separatoare, precum și energia relativă dintre adâncimile celor două minime coexistente, descresc pentru nucleele mai grele. De asemenea este de menționat faptul că valorile de limită  $\beta_W$  ale formalismului folosit sunt cu mult mai mari decât poziția peretelui exterior al potențialului sextic fitat. Acest fapt ne asigură de corectitudinea comportării funcției de undă la valori mari ale variabilei  $\beta$ .

Toate nucleele trec printr-o tranziție de fază a formelor de tip Jacobi, ce are loc de la deformare mică a stărilor joase, la deformare mare pentru stările mai înalte. Tranziția propriu-zisă are loc în apropierea unei stări critice al cărei număr cuantic rotațional scade pe măsură ce nucleul devine mai greu. Mai mult de atât, această tranziție de fază dinamică de tip Jacobi se schimbă de la a fi

de ordinul unu cu un potențial critic cu două gropi în  $^{96}\text{Mo}$ , la a fi de ordinul doi cu un potențial critic aproximativ plat în  $^{100}\text{Mo}$ . Această observație este susținută de distribuția de probabilitate  $\beta$  calculată pentru stările critice și vizualizată în Fig.6. Într-adevăr, pentru nucleul  $^{96}\text{Mo}$ , starea critică prezintă evident o coexistență de forme cu amestec, ce este reflectată printr-un profil cu două vârfuri al distribuției de probabilitate de deformare. În același timp, stările critice ale nucleelor  $^{98}\text{Mo}$  și  $^{100}\text{Mo}$ , au o distribuție a deformării extinsă, fapt consistent cu un potențial plat. O astfel de tranziție, de la deformarea mică la o formă nucleară puternic deformată a fost observată de fapt în mai multe nuclee din regiunea  $A \sim 100$ .

**În concluzie, analiza evoluției proprietăților spectrale ale unui potențial sextic  $\gamma$ -instabil cu două minime degenerate pentru starea fundamentală, a dus la stabilirea unor semnături unice pentru nuclee cu astfel de comportare. Acest fapt a fost folosit pentru identificarea unor tranziții de fază cu amestec al formelor în câteva secvențe de nuclee par-pare.**

2. Pentru al doilea obiectiv am construit o versiune exact separabilă și solubilă analitic a Hamiltonianului Bohr, care este potrivită pentru descrierea nucleelor tranziționale [4]. De data aceasta s-a considerat un potențial redus de tipul celui din Ec.(2), ce facilitează o separare exactă a variabilei  $\beta$  de cele  $\gamma$ -unghiulare. Aproximând termenul rotațional al Hamiltonianului Bohr conform condițiilor pentru un nucleu prolate conform Ec.(3), și mediind ecuația totală pe funcțiile rotaționale, se ajunge la următoarele ecuații pentru variabilele  $\beta$  și  $\gamma$ :

$$\left[ -\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{W}{\beta^2} + u(\beta) \right] f(\beta) = \epsilon f(\beta), \quad (36)$$

$$\left[ -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{K^2}{4 \sin^2 \gamma} + \frac{L(L+1) - K^2}{3} + u(\gamma) \right] \eta(\gamma) = W \eta(\gamma). \quad (37)$$

Pentru ecuația variabilei  $\gamma$ , am considerat un potențial standard

$$v(\gamma) = b + v_0(\gamma) = b + 2c^2(1 - \cos 3\gamma), \quad (38)$$

modificat însă de contribuția dată de  $b$  care are rolul de a corecta energia de zero a excitațiilor variabilei  $\gamma$ . Această renormare a potențialului  $\gamma$  contribuie direct cu un termen centrifugal  $b/\beta^2$  la ecuația pentru variabila  $\beta$ . Pentru a avea o contribuție centrifugală totală repulsivă pentru ecuația variabilei  $\beta$ , contribuția negativă a termenului  $b/\beta^2$  pentru  $b < 0$  trebuie compensată de valoarea proprie pozitivă a ecuației  $\gamma$  pentru potențialul (38) necorectat  $v_0(\gamma)$ . Aplicând o aproximație de ordin unu tuturor funcțiilor trigonometrice din ecuația (37) și din expresia lui  $v_0(\gamma)$  în jurul valorii  $\gamma = 0$ , se obține următoarea ecuație diferențială

$$\left[ -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \left( \frac{K}{2} \right)^2 \frac{1}{\gamma^2} + (3c)^2 \gamma^2 \right] \eta(\gamma) = \epsilon^\gamma \eta(\gamma), \quad (39)$$

unde

$$\epsilon^\gamma = W - \frac{L(L+1) - K^2}{3} - b, \quad (40)$$

și care seamănă cu o ecuație radială pentru un oscilator armonic cuantic bidimensional. Energia este atunci  $\epsilon_{Kn_\gamma}^\gamma = 6c(n_\gamma + 1)$  cu  $n_\gamma = 0, 1, 2, \dots$  care este dat de  $n_\gamma = 2n + \frac{|K|}{2}$  astfel încât pentru  $K = \text{par}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Astfel, constanta de cuplaj este definită în felul următor:

$$W = \frac{L(L+1) - K^2}{3} + 6c(n_\gamma + 1) + b. \quad (41)$$

Contribuția centrifugală la ecuația variabilei  $\beta$ , provenită din excitațiile variabilei  $\gamma$ , va fi atunci  $6c(n_\gamma + 1) + b$ , care este repulsivă pentru toate stările dacă  $b > -6c$ .

În ceea ce privește ecuația pentru variabila  $\beta$ , am considerat pentru aceasta conform obiectivului etapei, un potențial de tip oscilator armonic cu o constantă de cuplaj dependentă de energie  $v(\beta, \epsilon) = k(\epsilon)\beta^2$ . Din considerente analitice cât și fizice, dependența de energie este fixată să fie liniară  $k(\epsilon) = 1 + a\epsilon$ . Ecuația (36) pentru un astfel de potențial este rezolvată la fel ca în cazul obișnuit al unui potențial constant de tip Davidson. Soluțiile corespunzătoare pentru valoarea proprie conduc însă la o ecuație pătratică

$$\epsilon = \sqrt{1 + a\epsilon} \left( 2n_\beta + p + \frac{5}{2} \right), \quad (42)$$

din care se extrage energia sistemului nelocal (potențial dependent de energie). Soluția pozitivă a ecuației de mai sus este

$$\epsilon_{LKn_\beta n_\gamma} = \left( 2n_\beta + p + \frac{5}{2} \right) \left[ \frac{a}{2} \left( 2n_\beta + p + \frac{5}{2} \right) + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4} \left( 2n_\beta + p + \frac{5}{2} \right)^2} \right], \quad (43)$$

unde

$$p = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{L(L+1) - K^2}{3} + b + 6c(n_\gamma + 1)} - \frac{3}{2}. \quad (44)$$

Astfel, starea fundamentală este caracterizată de  $K, n_\beta, n_\gamma = 0$ , stările benzii  $\beta$  vor fi diferențiate de  $n_\beta = 1$ , în timp ce banda  $\gamma$  este definită de  $K = 2$  și  $n_\gamma = 1$ .

Modelul construit a fost aplicat pentru descrierea excitațiilor colective în nuclee situate în mijlocul sau apropierea unei tranziții de fază cuantice dintre forme predominant sferice și forme puternic deformate. Deci, pentru aplicații numerice au fost alese nucleele  $^{102}\text{Zr}$ ,  $^{106}\text{Mo}$ ,  $^{146,148}\text{Ce}$ ,  $^{148,150}\text{Nd}$ ,  $^{152,154}\text{Sm}$ ,  $^{154,156}\text{Gd}$  and  $^{156,158}\text{Dy}$ . Acestea includ bine cunoscuții izotoni critici  $N = 90$  cu câte un vecin mai greu (deformat) sau mai ușor (mai puțin deformat), dar și nuclee din zona  $N = 60$  considerate ca terminale pentru tranziții de fază similare care sunt foarte aproape de pătura protonică închisă la  $Z = 50$ . Energiile experimentale pentru aceste nuclee, corespunzătoare benzilor fundamentale,  $\beta$  și  $\gamma$ , au fost fitate cu formula pentru energie (43) considerând  $a, b$  și  $c$  ca parametri liberi. Se observă ca energiile pentru benzile cu  $K = 0$  depind doar de  $a$  și o cantitate constantă ce include ceilalți doi parametri. Calitatea foarte bună a fiturilor a fost folosită pentru clarificarea apartenenței unor stări la benzile vibraționale precum și pentru generarea de predicții



referitoare la stările mai înalte. Parametrii obținuți prin fitarea nivelelor energetice au valori deosebite în cazul nucleelor critice. Am constatat astfel că nucleele critice au o dependență mult mai puternică a potențialului de energie, ceea ce face ca stările excitate să corespundă unor fluctuații mai rigide a suprafeței nucleare. O altă semnătură a caracterului critic ce reiese din rezultatele numerice ale modelului propus se referă la diferența foarte mare dintre deformarea din starea fundamentală și cea din banda  $\gamma$ . Acest aspect poate fi interpretat ca o coexistență a două forme cu secvențe rotaționale distincte construite pe acestea. Testarea supremă a modelului a constat în compararea tranzițiilor electromagnetice experimentale cu cele calculate cu ajutorul formalismului teoretic folosind parametrii fixați din fitul energiilor. Acordul bun cu experimentul obținut la comparația spectrelor energetice este păstrat și în acest caz.

Rezultatul teoretic principal a fost eliminarea unor probleme ale abordărilor anterioare, cum ar fi posibilitatea descrierii nucleelor critice cu un potențial exact separabil nefiind astfel necesară separarea adiabatică dintre fluctuațiile  $\beta$  și  $\gamma$ . Din punctul de vedere al descrierii sistemelor nucleare, modelul oferă o îmbunătățire majoră în ceea ce privește reproducerea stărilor din banda  $\beta$ . Acest lucru se datorează folosirii teoriei potențialelor dependente de energie la fluctuațiile variabilei  $\beta$ . Nu în ultimul rând trebuie menționat și acordul fără precedent al rezultatelor teoretice cu cele experimentale obținute pentru numeroase stări aparținând la trei benzi diferite.

O versiune mai sofisticată a modelului Bohr cu un potențial dependent de energie a fost realizat în felul următor (lucrare în curs de evaluare): Punctul de plecare este evident Hamiltonianul Bohr. Considerând acum un potențial redus de forma Ec.(2), se poate realiza o separare exactă a Hamiltonianului Bohr, folosind o funcție totală factorizată  $\Psi(\beta, \gamma, \Omega) = R(\beta)\Phi(\gamma, \Omega)$ . Rezultatul constă în două ecuații diferențiale, una pentru variabila  $\beta$ , și alta pentru cele  $\gamma$ -unghiulare. Potențialul  $w(\gamma)$  este ales să fie de forma:

$$w(\gamma) = c_1(1 - \cos 3\gamma) - c_2(1 - \cos^2 3\gamma), \quad (45)$$

unde  $c_1$  și  $c_2$  sunt parametri liberi. Minimul acestui potențial poate fi axial sau triaxial, fapt ce îl face potrivit pentru investigarea tranziției de fază dintre aceste două cazuri.

Soluția ecuației  $\gamma$ -unghiulare este derminată prin diagonalizare în baza armonicilor sferice  $SO(5) |\tau\alpha LM\rangle = \mathcal{Y}_{\tau\alpha LM}(\gamma, \Omega)$  indexate de momentul cinetic  $L$ , proiecția sa pe axa 3 a sistemului de referință intrinsec, numărul de senioritate  $\tau$ , și ordinul  $\alpha$  ce distinge compunerea aceleiași moment cinetic  $L$ . Funcția totală este o dezvoltare trunchiată în această bază

$$\Phi_{LM}^{\kappa}(\gamma, \Omega) = \sum_{\tau, \alpha} G_{\tau\alpha L}^{\kappa} \mathcal{Y}_{\tau\alpha LM}(\gamma, \Omega), \quad (46)$$

definită de amplitudinile de dezvoltare  $G_{\tau\alpha L}^{\kappa}$ , și unde  $\kappa$  este numărul de completitudine al soluțiilor diagonalizării. Operatorul cinetic  $\hat{\Lambda}^2$  este diagonal în baza aleasă, iar elementele de matrice ale potențialului  $w(\gamma)$  pot fi exprimate prin formule analitice compacte. În final, valoarea proprie a

ecuației  $\gamma$ -unghiulare  $W_{L\kappa}$  va fi indexată doar de momentul cinetic și numărul de completitudine  $\kappa$ . Pentru convergența rezultatelor de diagonalizare, baza a fost trunchiată la  $\tau = 30$ , ceea ce este mai mult decât suficient.

Potențialul pentru variabila  $\beta$  este ales să fie de tip Kratzer, al cărui termen hiperbolic are o constantă de cuplaj ce depinde liniar de energia totală a sistemului:

$$v(\beta) = \frac{a_1}{\beta^2} - \frac{1 + a_2\epsilon}{\beta}. \quad (47)$$

Ecuația diferențială asociată variabilei  $\beta$  este rezolvată prin transformarea sa la o ecuație diferențială Whittaker. Soluția celei din urmă, care este regulată atât în origine cât și la infinit, poate fi exprimată cu ajutorul polinoamelor Laguerre asociate dacă este îndeplinită o anumită condiție ce face legătura între parametrii ecuației. Această condiție conduce la o ecuație pătratică pentru determinarea energiei  $\epsilon$ . Soluția fizică a acestei ecuații este

$$\epsilon_{nL\kappa} = \frac{1}{a_2^2} \left[ 2 \left( n + \frac{5}{2} + p_{L\kappa} \right) \sqrt{\left( n + \frac{5}{2} + p_{L\kappa} \right)^2 + a_2} - 2 \left( n + \frac{5}{2} + p_{L\kappa} \right)^2 - a_2 \right], \quad (48)$$

iar funcția de undă corespunzătoare acestei energii este

$$R_{nL\kappa}(\beta) = N_{nL\kappa} \beta^{p_{L\kappa}} e^{-\eta_{nL\kappa}\beta} L_n^{2p_{L\kappa}+3}(2\eta_{nL\kappa}\beta). \quad (49)$$

Notațiile folosite mai sus, au următoarele expresii

$$\eta_{nL\kappa} = \frac{1 + a_2\epsilon_{nL\kappa}}{2 \left( n + \frac{5}{2} + p_{L\kappa} \right)}, \quad (50)$$

$$p_{L\kappa} = \sqrt{\frac{9}{4} + W_{L\kappa} + a_1} - \frac{3}{2}. \quad (51)$$

Numărul întreg  $n$  joacă aici rolul numărului cuantic al excitației asociate variabilei  $\beta$ .

Factorul de normare al funcției de undă este determinat din condiția:

$$\int_0^\infty [R_{nL\kappa}(\beta)]^2 \beta^4 \left( 1 + \frac{a_2}{\beta} \right) d\beta, \quad (52)$$

unde măsura de integrare modificată

$$d\beta \rightarrow \left( 1 - \frac{\partial v(\beta)}{\partial \epsilon} \right) d\beta, \quad (53)$$

vine din dependența de energie a potențialului. Corecția are rolul de conserva în timp distribuția de probabilitate. Făcând uz de proprietățile polinoamelor Laguerre asociate, constanta de normare capătă o formă analitică simplă:

$$N_{nL\kappa} = \sqrt{\frac{\eta_{nL\kappa} n!}{\Gamma(n + 2p_{L\kappa} + 4) (a_2 \eta_{nL\kappa} + n + p_{L\kappa} + 2)}} (2\eta_{nL\kappa})^{p_{L\kappa}+2}. \quad (54)$$

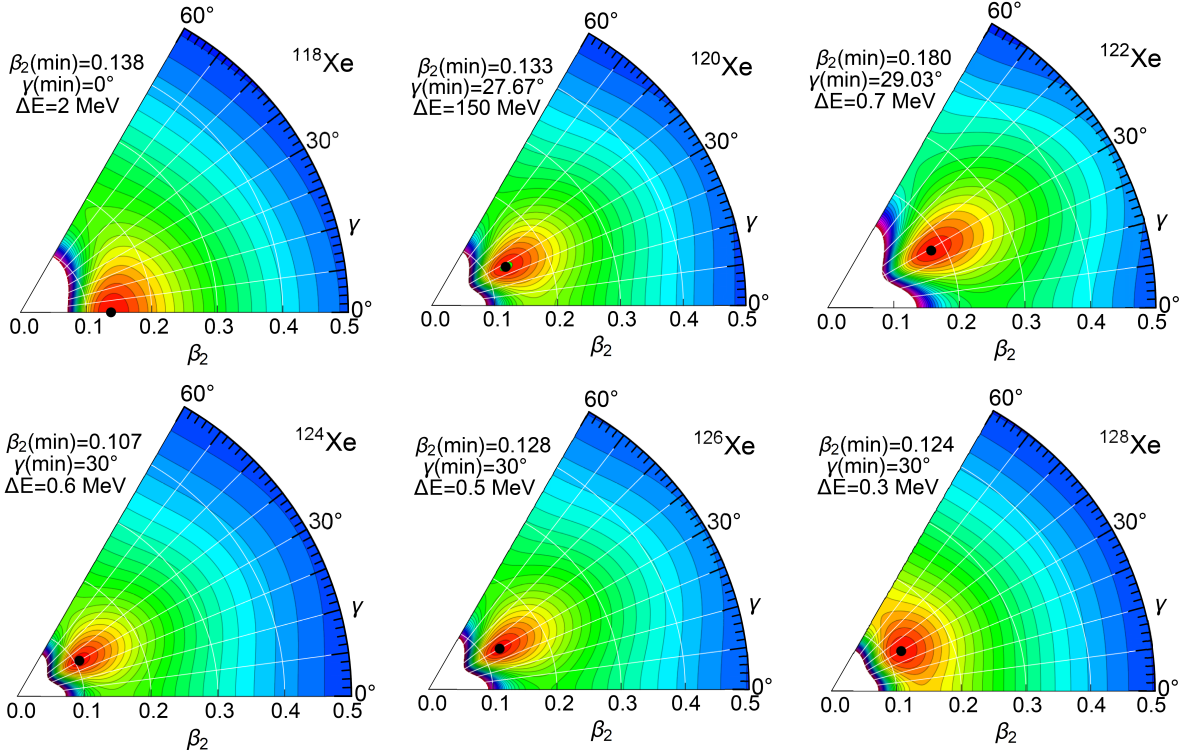


Figure 7: Potențialele totale  $U$  din ec.(24) ale nucleelor  $^{118-128}\text{Xe}$ , pentru starea fundamentală, vizualizate ca funcție de deformarea cvadrupolară scalată la variabila  $\beta$  și măsura deformării triaxiale  $\gamma$ . Pentru fiecare nucleu sunt date coordonatele minimumului, iar pasul liniilor de contur este dat de  $\Delta E$ .

Proprietățile dinamice ale nucleelor considerate în acest studiu, sunt mai ușor de evidențiat folosind un potențial efectiv

$$V_{eff} = \frac{\hbar^2}{2B} \left( \frac{2 + W_{L\kappa} + a_1}{\beta^2} - \frac{1 + a_2 \epsilon_{nL\kappa}}{\beta} \right), \quad (55)$$

ce include contribuția centrifugală. Acesta este obținut din ecuația (36), prin schimbarea de funcție  $R(\beta) = f(\beta)/\beta^2$ .

Modelul a fost aplicat pentru descrierea spectrelor de energie și a tranzițiilor electromagnetice cvadrupolare pentru nucleele  $^{118-128}\text{Xe}$ . S-a obținut un acord foarte bun cu datele experimentale. Parametrii modelului obținuți din fitarea datelor experimentale sunt folosiți pentru a extrage informații referitoare la proprietățile dinamice ale nucleelor considerate. Unul dintre rezultatele principale este identificarea unei tranziții de la forme axiale la cele triaxiale, al cărui punct critic este în apropierea nucleului  $^{120}\text{Xe}$ . După cum se poate vedea din Fig.1, tranziția are loc foarte brusc, astfel încât triaxialitatea maximă de  $\gamma = 30^\circ$  este atinsă imediat și menținută până la ultimul nucleu considerat  $^{128}\text{Xe}$ . În ceea ce privește dependența de energie, aceasta crește până la același nucleu critic  $^{120}\text{Xe}$ , după care descrește mai lent, ajungând să fie neglijabilă pentru ultimul

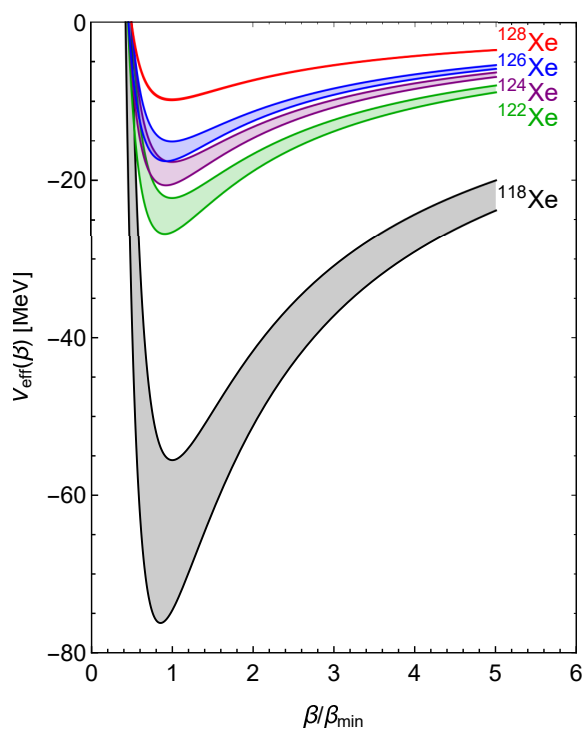


Figure 8: Variația potențialelor efective pentru nucleele  $^{118,122-128}\text{Xe}$  între starea fundamentală și prima stare  $\beta$  excitată. Starea fundamentală este curba de deasupra.

nucleu  $^{128}\text{Xe}$ . Acest lucru poate fi văzut în Fig.2, unde este vizualizată variația potențialului efectiv (55) determinat pentru fiecare nucleu, între starea fundamentală și prima stare  $0^+$  excitată. În această figură lipsește rezultatul pentru nucleul critic, a cărei dependență de energie este aproape asimptotică și nu poate fi reprezentat în aceeași scară de unități. Acest lucru este evident și din distanța liniilor de energie constantă a potențialului total prezentat pentru acest nucleu în Fig.1. Un efect al dependenței de energie a potențialului, este micșorarea deformării medii din starea  $\beta$  excitată. Pentru o dependență de energie puternică, cum se întâmplă în cazul nucleului  $^{120}\text{Xe}$ , deformarea medie din starea excitată devine chiar mai mică decât cea din starea fundamentală. Caracterul critic al nucleului  $^{120}\text{Xe}$  este în conformitate cu faptul că acesta se află exact între două pături neutronice majore închise, 52 și 80. În aceste circumstanțe, potențialul său cu cea mai mare adâncime corespunde unor fluctuații mari ale suprafeței nucleare, iar dependența sa puternică de energie este explicată de spațiul maxim al neutronilor de valență ce permite schimbări microscopice substanțiale între stările colective.

**O concluzie importantă a acestui obiectiv constă în faptul că pe lângă îmbunătățirea descrierii stărilor  $\beta$  excitate, dependența de energie a potențialului colectiv este sensibil mai mare în nucleele critice asociate tranzițiilor de fază între forme nucleare sferice și cele deformate.**

## Toate obiectivele au fost îndeplinite complet conform planului de realizare

---

Pentru îndeplinirea obiectivelor proiectului au fost realizate integral toate activitățile necesare:

1. Documentarea referitor la starea curentă a subiectului.
2. Identificarea aspectelor cheie ce trebuiesc urmate și a rezultatelor originale ce ar trebui obținute.
3. Delegarea sarcinilor fiecărui membru și stabilirea lanțului de colaborare.
4. Confruntarea aportului fiecărui membru la formalismul analitic.
5. Scrierea de noi programe de calcul.
6. Crearea de teste pentru rezultatele numerice și efectuarea calculelor.
7. Colectarea datelor experimentale recente și confruntarea acestora cu predicțiile teoretice.
8. Editarea lucrărilor științifice.
9. Diseminarea rezultatelor prin participarea la manifestări științifice

### Articole publicate cu acknowledgement:

1. R. Budaca and A. I. Budaca, *Coexistence, mixing and fluctuation of nuclear shapes*, Europhysics Letters **123**, 42001 (2018).
2. R. Budaca, *Semiclassical description of chiral geometry in triaxial nuclei*, Physical Review C **98**, 014303 (2018).
3. P. Baganu, R. Budaca, and A. I. Budaca, *Bohr Hamiltonian with a potential having spherical and deformed minima at the same depth*, EPJ Web of Conference **194**, 01007 (2018).
4. A. I. Budaca and R. Budaca, *Description of critical point nuclei within an energy dependent geometric model*, Eur. Phys. J. Plus **134**, 145 (2019).
5. R. Budaca, P. Baganu, and A. I. Budaca, *Geometrical model description of shape coexistence in Se isotopes*, Nuclear Physics A, **990**, 137 (2019).
6. R. Budaca, A. I. Budaca, and P. Baganu, *Application of the Bohr Hamiltonian with a double-well sextic potential to collective states in Mo isotopes*, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics **46**, 125102 (2019).
7. R. Budaca, *Role of triaxiality in the structure of chiral partner bands*, Physics Letters B **797**, 134583 (2019).

8. R. Budaca and P. Baganu, *Comment on "Elimination of degeneracy in the  $\gamma$ -unstable Bohr Hamiltonian in the presence of an extended sextic potential"*, Phys. Rev. C **100**, 049801 (2019).
9. P. Baganu, A. Lahbas, R. Budaca, *Quasi-exact description of the  $\gamma$ -unstable shape phase transition*, Mod. Phys. Lett. A **35**, 2050085 (2020).

**Articole submitte la publicare cu acknowledgement:**

1. A. I. Budaca, R. Budaca, *Triaxiality and state-dependent shape properties of Xe isotopes*.

**Conferințe:**

1. *Wobbling phase transition in odd mass nuclei*, R. Budaca, XI. International Conference on Nuclear Structure Properties (NSP2018), 12-14 Septembrie, 2018, Trabzon, Turcia.
2. *Proton emission with a generalized electrostatic barrier*, A. I. Budaca, R. Budaca, XI. International Conference on Nuclear Structure Properties (NSP2018), 12-14 Septembrie, 2018, Trabzon, Turcia.
3. *Bohr Hamiltonian with a potential having spherical and deformed minima at the same depth*, P. Baganu, R. Budaca, A. I. Budaca, International Conference "Nuclear Structure and Related Topics" (NSRT18), 3-9 Iunie, 2018, Burgas, Bulgaria.
4. *Nuclear shapes for the critical point of the  $U(5) - SU(3)$  nuclear shape phase transition*, P. Baganu, R. Budaca, A. I. Budaca, Shapes and Symmetries in Nuclei: from Experiment to Theory (SSNET'18 Conference), 5-9 Noiembrie, 2018, Gif-sur-Yvette, Franța.
5. *Chiral and wobbling vibrations in triaxial nuclei: a semiclassical approach*, R. Budaca, XVII Workshop on Nuclear Physics (WONP2019), April 1-5 (2019), Havana, Cuba.
6. *Shape coexistence and mixing from a collective model perspective*, A. I. Budaca and R. Budaca, XVII Workshop on Nuclear Physics (WONP2019), April 1-5 (2019), Havana, Cuba.
7. *Semiclassical description of wobbling and chiral modes in triaxial nuclei*, R. Budaca, XXIII International School on Nuclear Physics, Neutron Physics and Applications, 22-28 September (2019), Varna, Bulgaria.
8. *Quasi-exact solutions for the Bohr Hamiltonian with sextic oscillator potential*, P. Baganu, R. Budaca, M. Chabab, A. Lahbas, and M. Oulne, XXIII International School on Nuclear Physics, Neutron Physics and Applications, 22-28 September (2019), Varna, Bulgaria.
9. *Chiral bands with rigid quasiparticle alignments*, R. Budaca, International Workshop "Shapes and Dynamics of Atomic Nuclei: Contemporary Aspects" (SDANCA-19), October 3-5 (2019), Sofia, Bulgaria.

Data  
Aprilie 2020

Director Proiect  
Radu Budaca

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Radu Budaca', written in a cursive style.