

RAPORT ȘTIINȚIFIC

privind implementarea proiectului PN-III-P1-1.1-TE-2016-0268, contract 50/2018
pentru perioada Mai 2018 - Decembrie 2018

Pentru anul 2018, conform planului de realizare, trebuiau realizate următoarele obiective:

1. Construirea unui model algebric colectiv bazat pe o metodă generalizată de rezolvare a Hamiltonianului Bohr cu cel mai general potențial în variabilele de formă ce permite minime de deformare multiple. (Partea 1/2)

Rezultate: Obținerea spectrelor colective din diagonalizarea unui Hamiltonian Bohr cu variabile de formă adiabatic separate și un potențial sextic în variabila β cu doua minime degenerate.

2. Dezvoltarea unor modele solubile analitic, bazate pe soluții parametrizate ale Hamiltonianului Bohr cu potențiale dependente de energie, pentru o descriere complet geometrică a coexistenței de forme în nuclee din apropierea păturilor protonice și neutronice închise $Z, N=50$. (Partea 1/2)

Rezultate: Realizarea unei sistematici a spectrelor colective folosind o soluție exactă a Hamiltonianului Bohr pentru un potențial γ -stabil de tip Davidson dependent de energie.

Livrabile propuse: 2 lucrări ISI publicate sau trimise la publicare și participarea la 2 conferințe internaționale.

-
1. Pentru realizarea primului obiectiv al etapei am pornit cu expresia generală a Hamiltonianului Bohr:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2 \sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{4\beta^2} \sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (1)$$

care este unealta tradițională pentru studierea mișcării nucleare colective asociate gradelor de libertate cvadрупolare. Există indicii experimentale ale unei separări adiabatică dintre fluctuațiile lui β și excitațiile cuplate ale variabilei γ și a unghiurilor Euler. Astfel de condiții colective pot fi modelate cu ajutorul unei forme separate pentru potențial:

$$V(\beta, \gamma) = [v(\beta) + u(\gamma)] \frac{\hbar^2}{2B} \quad (2)$$

la fel ca în celebra soluție geometrică $X(5)$. Pentru separarea completă a variabilei β este necesară aproximarea contribuției centrifugale ce vine din partea ecuației γ -unghiulare cu o valoare medie statică. Speculând acum separarea variabilei β , ecuația diferențială asociată Hamiltonianului (1) este descompusă în două ecuații distincte: una doar pentru variabila β , iar cealaltă pentru gradele de libertate γ -unghiulare. Nucleele atomice, de cele mai multe ori au o formă sferoidală de tip *prolate*, ceea ce corespunde unui potențial colectiv cu un minim foarte pronunțat în valoarea $\gamma = 0$. Folosirea unei aproximații armonice pentru variabila γ , face posibilă separarea acestuia de gradele de libertate rotaționale. Mediind acum toate ecuațiile cu funcțiile proprii rotaționale care sunt de fapt matricile Wigner, se obține cu ușurință următoarea expresie pentru ecuația β :

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{L(L+1)}{3\beta^2} + v(\beta) \right] \Psi(\beta) = \epsilon^\beta \Psi(\beta), \quad (3)$$

unde energia este scalată la fel ca potențialul, adică $\epsilon^\beta = 2BE/\hbar^2$. Această ecuație descrie complet stările rotațional-vibraționale cu proiecția momentului cinetic pe a treia axă din sistemul de referință al laboratorului $K = 0$ și de paritate pozitivă. Mai concret, această ecuație descrie stările de moment cinetic par din banda colectivă fundamentală și așa numitele benzi excitate β vibraționale.

Datorită separării variabilei β , acum potențialul asociat acestuia este constrâns de simetria modelului Bohr-Mottelson să fie un polinom în β^2 . Cel mai simplu potențial care poate să aibă simultan două minime este potențialul sextic:

$$v(\beta) = a\beta^2 + b\beta^4 + c\beta^6. \quad (4)$$

Ecuția diferențială (3) pentru un astfel de potențial are anumite proprietăți de scalare ce conduc la următoarea echivalență dintre energiile proprii pentru o anumită relație între parametrii potențialului:

$$\epsilon^\beta(a, b, c) = a^{1/2}\epsilon^\beta(1, ba^{-3/2}, ca^{-2}). \quad (5)$$

Astfel, pentru a determina în mod unic spectrele energetice pentru un potențial sextic, este suficient să rezolvăm ecuația (3) doar pentru potențialul:

$$v(\beta) = \beta^2 + \mu\beta^4 + \nu\beta^6. \quad (6)$$

Acest potențial scalat are două minime doar dacă $\mu < 0$ și $\nu > 0$. Acestea sunt poziționate în

$$\beta_{min} = \begin{cases} 0, \\ \sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2 - 3\nu} - \mu}{3\nu}}, \end{cases} \quad (7)$$

Pentru rezolvarea ecuației (3) am dezvoltat funcția de undă într-o serie de tip Fourier-Bessel. Mai întâi de toate, condiția la limită obișnuită

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Psi(\beta) = 0 \quad (8)$$

este înlocuită cu

$$\Psi(\beta_W) = 0, \quad (9)$$

unde β_W este o limită finită a cărui valoare este fixată astfel încât să cuprindă aspectele relevante ale problemei. Această schimbare a condiției de limită ne oferă posibilitatea de a folosi funcții Bessel de ordinul unu ca stări ale bazei de diagonalizare a ecuației Schrödinger de tip radial (3). Pentru definirea bazei însă, trebuie mai întâi rezolvată problema pentru mișcarea liberă în potențialul de tip groapă dreptunghiulară a cărui perete infinit este poziționat la limita finită β_W menționată mai sus:

$$\tilde{v}(\beta) = \begin{cases} 0, \beta \leq \beta_W \\ \infty, \beta > \beta_W. \end{cases} \quad (10)$$

Folosind acest potențial în (3), se obține următoarea ecuație diferențială:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \frac{4}{\beta^2} + \frac{L(L+1)}{3\beta^2} \right] \tilde{\Psi}(\beta) = \lambda \tilde{\Psi}(\beta). \quad (11)$$

Soluțiile normate ale acestei ecuații

$$\tilde{\Psi}_{\nu n}(\beta) = \frac{\sqrt{2}\beta^{-\frac{3}{2}} J_\nu(\alpha_n \beta / \beta_W)}{\beta_W J_{\nu+1}(\alpha_n)}, \quad (12)$$

sunt proporționale cu funcțiile Bessel de ordin unu J_ν . Argumentul ν este definit de

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{L(L+1)}{3}}, \quad (13)$$

în timp ce $\alpha_n = \beta_W \lambda$ sunt zerourile funcției Bessel indexate de $n = 1, 2, 3, \dots$. Aceste funcții sunt ortonormate și considerate mai departe ca bază de diagonalizare pentru problema inițială a ecuației (3), astfel încât funcția de undă totală poate fi scrisă ca o dezvoltare în termeni de funcțiile proprii (12):

$$\Psi_{Lk}(\beta) = \sum_n^{n_{max}} A_n^k \tilde{\Psi}_{\nu n}(\beta), \quad (14)$$

unde k distinge soluțiile de diagonalizare, iar n_{max} este o dimensiune finită a bazei de diagonalizare. Pentru a determina complet baza de diagonalizare este nevoie de fixarea atât a dimensiunii de trunchiere cât și a valorii de limită β_W . Cea din urmă depinde atât de stare cât și de dimensiunea bazei. Există însă o valoare minimă pentru fiecare dimensiune ce satisface cerințele de precizie pentru o anumită stare. Deasemenea valoarea minimă este mai mare pentru stări energetice mai înalte. Deci mai întâi de toate se stabilește o limită a preciziei și o anumită dimensiune a bazei de diagonalizare. Mai departe, valoarea de limită β_W se stabilește astfel încât prin creșterea semnificativă a acesteia, energia ultimei stări energetice considerate în aplicații și obținute în urma diagonalizării să nu se modifice mai mult decât precizia presetată. Convergența energiilor stărilor mai joase va fi astfel automat satisfăcută. Acest lucru a fost testat individual pentru fiecare stare. Pentru calculele numerice efectuate în cadrul acestei etape a fost folosită o bază de dimensiunea $n_{max} = 20$ și o precizie minimă de 10^{-7} pentru energia absolută a stării $L = 20$ din prima bandă β excitată.

Elementele de matrice ale Hamiltonianului asociat ecuației diferențiale (3) în baza funcțiilor (12) sunt date de:

$$H_{nm} = \left(\frac{\alpha_n}{y_W}\right)^2 \delta_{nm} + \frac{2 \sum_{i=1}^3 v_i (y_W)^{2i} I_{nm}^{(\nu,i)}}{q^2 J_{\nu+1}(\alpha_n) J_{\nu+1}(\alpha_m)}, \quad (15)$$

unde $v_1 = 1$, $v_2 = \mu$ și $v_3 = \nu$. Pentru determinarea integralelor

$$I_{nm}^{(\nu,i)} = \int_0^1 x^{2i+1} J_\nu(\alpha_n x) J_\nu(\alpha_m x) dx, \quad x = \beta/\beta_W, \quad (16)$$

s-au folosit relații de recurență corespunzătoare ce optimizează semnificativ calculul numeric al acestora. Energiile pentru anumite valori ale parametrilor μ și ν și un moment cinetic L fixat obținute din procedura de diagonalizare sunt indexate de k și corespund la stări de moment cinetic L ce fac parte din diferite benzi β vibraționale. Astfel cea mai joasă stare constituie un nivel din banda fundamentală, următoarea stare aparține primei benzi β excitate și așa mai departe. Procedura de diagonalizare deasemenea oferă și componentele vectorilor proprii corespunzători fiecărei stări ce definesc de fapt coeficienții dezvoltării (14).

Impunând restricții suplimentare pentru potențialul sextic corespunzătoare unor cerințe fenomenologice necesare, atât potențialul cât și întregul formalism al modelului se poate restrânge la dependența de un singur parametru liber. În una din lucrările raportate, potențialul sextic a fost constrâns să aibă două minime degenerate. În acest caz, s-a determinat relația necesară ce trebuie îndeplinită între parametrii inițiali μ și ν , din care s-a extras un nou parametru care definește comportarea completă a unui astfel de sistem. Era de așteptat ca pentru un astfel de potențial, densitatea de probabilitate

$$\rho_{Ln_\beta}(\beta) = |\Psi_{Ln_\beta}(\beta)|^2 \beta^4 \quad (17)$$

pentru starea fundamentală să fie împărțită între cele două minime cu câte un maxim în fiecare. Contrar așteptărilor, rezultatele au arătat doar indicii ale unei fragmentări ale densității de probabilitate β în starea fundamentală fără maxime multiple. Indicații mai puternice ale prezenței a două minime degenerate în potențial au fost identificate însă în comportarea densității de probabilitate a primii stări β excitate. Motivul pentru această inhibare a signaturilor de coexistență a formelor asociate celor două minime constă în faptul că mai există o contribuție centrifugală la potențial ce vine de la termenul multidimensional al energiei cinetice din Hamiltonianul Bohr. Aceasta are efectul de ridicare și deplasare a minimului sferic, astfel încât importanța acestuia este substanțial diminuată. Acest lucru poate fi observat atunci când funcția de undă totală este schimbată cu $\psi(\beta) = \Psi(\beta)/\beta^2$. Ecuația diferențială (3) pentru noua funcție se prezintă atunci sub forma unei ecuații Schrödinger unidimensionale:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + v_{eff}(\beta) \right] \psi(\beta) = \epsilon^\beta \psi(\beta), \quad (18)$$

al cărei potențial efectiv este exprimat ca

$$v_{eff}^L(\beta) = \frac{L(L+1)+6}{3\beta^2} + \beta^2 + \mu\beta^4 + \nu\beta^6. \quad (19)$$

După cum se poate vedea, chiar și pentru stările cu $L = 0$ (inclusiv starea fundamentală), contribuția centrifugală adițională ce a fost menționată mai sus nu dispare și își păstrează efectul de ridicare și mutare a minimului sferic din potențialul sextic original. În consecință, chiar dacă potențialul sextic original are două minime degenerate ca energie, cel sferic poate complet dispărea din potențialul efectiv chiar și al stării fundamentale pentru anumite valori ale parametrilor μ și ν , unde doar unul din ei este independent. Această problemă a fost discutată în cea de a doua lucrare publicată raportată pentru această etapă. În lucrarea menționată s-a optat pentru un potențial sextic constrâns astfel încât potențialul efectiv pentru $L = 0$ să prezinte două minime degenerate. Chiar dacă prezența unei noi condiții pentru potențialul sextic original, reduce problema la un singur parametru independent, o relație analitică între cei doi parametri nu există. Folosind totuși o corespondență numerică între cei doi parametri s-au realizat calcule pentru câteva astfel de cazuri. Efectul barierei asupra nivelelor energetice și a densităților de probabilitate corespunzătoare stării fundamentale și primei stări β excitate a fost studiat cu ajutorul figurii 1.

Restricția de a avea minime degenerate pentru potențialul efectiv face ca bariera separatoare să-și varieze în același timp atât înălțimea cât și grosimea. Am observat astfel că pentru bariere foarte mari, stările benzii fundamentale sunt complet separate de cele din banda β excitată. Într-adevăr, distribuția de probabilitate pentru stările $L = 0$ din cele două benzi au ambele un singur vârf localizat în una din gropile potențialului efectiv. Micșorând treptat înălțimea și grosimea barierei, devine posibilă tunelarea dintre cele două gropi de potențial, astfel încât densitatea de probabilitate a stării fundamentale începe să se "scurgă" și în minimul mai puțin deformat. La un moment dat, aceasta capătă o formă cu două vârfuri, ceea ce este exact comportarea de coexistență a formelor nucleare în starea fundamentală. Dacă bariera separatoare este micșorată și mai mult, cele două vârfuri din distribuția de probabilitate a stării fundamentale se vor contopi într-unul singur dar extins peste cele două minime ale potențialului efectiv. Acesta din urmă este un exemplu de fluctuație a formei nucleare asociate unor nuclee critice pentru tranziția de fază cuantică dintre formele nucleare deformate și cele sferice. Astfel, cazurile considerate în figura 1, reprezintă o evoluție fenomenologică a comportării unui sistem ce prezintă două configurații de deformare distincte reprezentate de cele două minime ale potențialului efectiv. Păstrând ordinea din figura 1, avem cazul unor forme coexistente

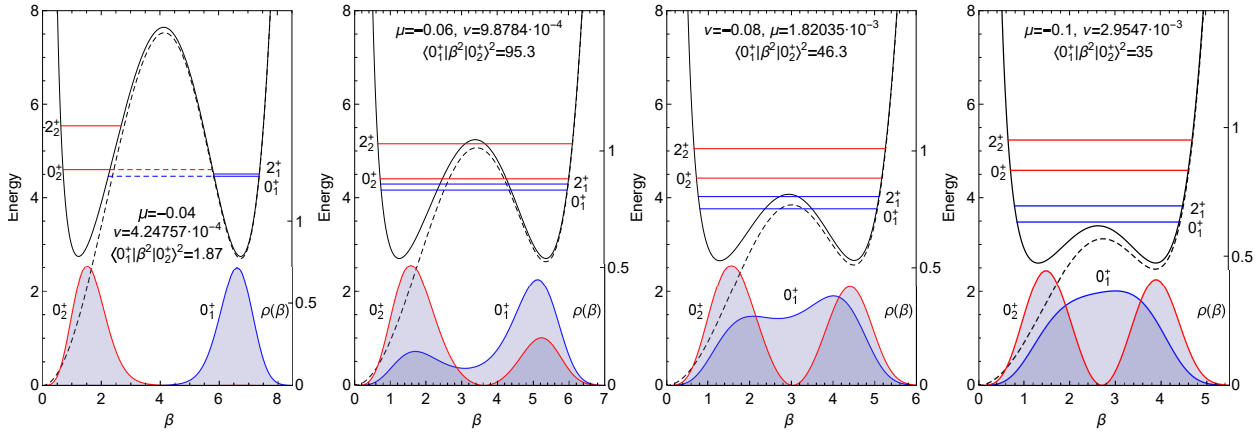


Figure 1: Potențialul efectiv (linie solidă) și cel original (linie întreruptă) precum și distribuția densității de probabilitate corespunzătoare stării fundamentale și primei stări β excitate, sunt reprezentate ca funcție de variabila de deformare β . Primele două nivele energetice din fiecare bandă sunt de asemenea vizualizate în aceleași unități absolute ca și potențialele.

complet separate fără interacție, apoi avem o coexistență de forme cu interacție puternică, și în sfârșit avem o trecere treptată către o fluctuație a formei nucleare extinsă peste ambele minime cu ignorarea completă a barierei separatoare.

Ca exemplu al coexistenței de forme cu interacție puternică, a fost găsit nucleul ^{76}Kr . Fitarea spectrului său energetic cu ajutorul modelului propus a oferit parametrii $\mu = 0.07314$ și $\nu = 1.5062 \cdot 10^{-3}$ ce definesc un potențial efectiv cu două minime aproape degenerate, și cu o stare fundamentală a cărei densitate de probabilitate prezintă clar două vârfuri. Un acord surprinzător de bun a fost obținut pentru probabilitățile de tranziție $E2$ ce leagă stări din diferite benzi vibraționale. La fel de bine este reprodusă și puterea tranziției monopolare $E0$ ce leagă stările $L = 0$ din banda fundamentală și banda β excitată. Acest lucru atestă corectitudinea modelului în ceea ce privește interacția puternică dintre minimile potențialului atunci când se așteaptă o fragmentare a stării fundamentale.

În concluzie, a fost construită o metodă de diagonalizare eficientă a Hamiltonianului Bohr cu potențiale ce posedă două minime. Implicațiile celor două minime în fenomenologia mișcării nucleare colective a fost studiată în detaliu cu validarea acestora cu exemple ale realizării acestora în nuclee reale. Rezultatul principal este totuși obținerea pentru prima dată a unei stări fundamentale ce are distribuția de probabilitate de localizare a deformării împărțită în două vârfuri corespunzătoare la două deformări diferite simultan.

Proprietățile ecuației Schrödinger pentru un potențial cu două minime degenerate au fost de asemenea folosite și pentru descrierea simetriei chirale realizate în nuclee impar-impare. Hamiltonianul colectiv în acest caz este construit printr-o procedură semiclassicală și este asociat unui spațiu unidimensional asociat la o variabilă chirală. Eforturile analitice cât și numerice în această direcție s-au materializat printr-o altă lucrare acceptată (2).

2. Pentru al doilea obiectiv am construit o versiune exact separabilă și solubilă analitic a Hamiltonianului Bohr, care este potrivită pentru descrierea nucleelor tranziționale. De data aceasta s-a considerat un

potențial redus de tipul:

$$v(\beta, \gamma) = u(\beta) + \frac{u(\gamma)}{\beta^2}, \quad (20)$$

ce facilitează o separare exactă a variabilei β de cele γ -unghiulare. Aproximând termenul rotațional al Hamiltonianului Bohr conform condițiilor pentru un nucleu prolate

$$\sum_{k=1}^3 \frac{Q_k^2}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)} \approx \frac{4}{3} \mathbf{Q}^2 + Q_3^2 \left(\frac{1}{\sin^2 \gamma} - \frac{4}{3} \right), \quad (21)$$

și mediind ecuația totală pe funcțiile rotaționale, se ajunge la următoarele ecuații pentru variabilele β și γ :

$$\left[-\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{W}{\beta^2} + u(\beta) \right] f(\beta) = \epsilon f(\beta), \quad (22)$$

$$\left[-\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{K^2}{4 \sin^2 \gamma} + \frac{L(L+1) - K^2}{3} + u(\gamma) \right] \eta(\gamma) = W \eta(\gamma). \quad (23)$$

Pentru ecuația variabilei γ , am considerat un potențial standard

$$v(\gamma) = b + v_0(\gamma) = b + 2c^2(1 - \cos 3\gamma), \quad (24)$$

modificat însă de contribuția dată de b care are rolul de a corecta energia de zero a excitațiilor variabilei γ . Această renormare a potențialului γ contribuie direct cu un termen centrifugal b/β^2 la ecuația pentru variabila β . Pentru a avea o contribuție centrifugală totală repulsivă pentru ecuația variabilei β , contribuția negativă a termenului b/β^2 pentru $b < 0$ trebuie compensată de valoarea proprie pozitivă a ecuației γ pentru potențialul (24) necorectat $v_0(\gamma)$. Aplicând o aproximație de ordin unu tuturor funcțiilor trigonometrice din ecuația (23) și din expresia lui $v_0(\gamma)$ în jurul valorii $\gamma = 0$, se obține următoarea ecuație diferențială

$$\left[-\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \left(\frac{K}{2} \right)^2 \frac{1}{\gamma^2} + (3c)^2 \gamma^2 \right] \eta(\gamma) = \epsilon^\gamma \eta(\gamma), \quad (25)$$

unde

$$\epsilon^\gamma = W - \frac{L(L+1) - K^2}{3} - b, \quad (26)$$

și care seamănă cu o ecuație radială pentru un oscilator armonic cuantic bidimensional. Energia este atunci $\epsilon_{K n_\gamma}^\gamma = 6c(n_\gamma + 1)$ cu $n_\gamma = 0, 1, 2, \dots$ care este dat de $n_\gamma = 2n + \frac{|K|}{2}$ astfel încât pentru $K = \text{par}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Astfel, constanta de cuplaj este definită în felul următor:

$$W = \frac{L(L+1) - K^2}{3} + 6c(n_\gamma + 1) + b. \quad (27)$$

Contribuția centrifugală la ecuația variabilei β , provenită din excitațiile variabilei γ , va fi atunci $6c(n_\gamma + 1) + b$, care este repulsivă pentru toate stările dacă $b > -6c$.

În ceea ce privește ecuația pentru variabila β , am considerat pentru aceasta conform obiectivului etapei, un potențial de tip oscilator armonic cu o constantă de cuplaj dependentă de energie $v(\beta, \epsilon) = k(\epsilon)\beta^2$. Din considerente analitice cât și fizice, dependența de energie este fixată să fie liniară $k(\epsilon) = 1 + a\epsilon$. Ecuația (22) pentru un astfel de potențial este rezolvată la fel ca în cazul obișnuit al unui potențial constant de tip Davidson. Soluțiile corespunzătoare pentru valoarea proprie conduc însă la o ecuație pătratică

$$\epsilon = \sqrt{1 + a\epsilon} \left(2n_\beta + p + \frac{5}{2} \right), \quad (28)$$

din care se extrage energia sistemului nelocal (potențial dependent de energie). Soluția pozitivă a ecuației de mai sus este

$$\epsilon_{LK n_\beta n_\gamma} = \left(2n_\beta + p + \frac{5}{2} \right) \left[\frac{a}{2} \left(2n_\beta + p + \frac{5}{2} \right) + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4} \left(2n_\beta + p + \frac{5}{2} \right)^2} \right], \quad (29)$$

unde

$$p = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{L(L+1) - K^2}{3}} + b + 6c(n_\gamma + 1) - \frac{3}{2}. \quad (30)$$

Astfel, starea fundamentală este caracterizată de $K, n_\beta, n_\gamma = 0$, stările benzii β vor fi diferențiate de $n_\beta = 1$, în timp ce banda γ este definită de $K = 2$ și $n_\gamma = 1$.

Modelul construit a fost aplicat pentru descrierea excitațiilor colective în nuclee situate în mijlocul sau apropierea unei tranziții de fază cuantice dintre forme predominant sferice și forme puternic deformate. Deci, pentru aplicații numerice au fost alese nucleele ^{102}Zr , ^{106}Mo , $^{146,148}\text{Ce}$, $^{148,150}\text{Nd}$, $^{152,154}\text{Sm}$, $^{154,156}\text{Gd}$ and $^{156,158}\text{Dy}$. Acestea includ bine cunoscuții izotoni critici $N = 90$ cu câte un vecin mai greu (deformat) sau mai ușor (mai puțin deformat), dar și nuclee din zona $N = 60$ considerate ca terminale pentru tranziții de fază similare care sunt foarte aproape de pătura protonică închisă la $Z = 50$. Energiile experimentale pentru aceste nuclee, corespunzătoare benzilor fundamentale, β și γ , au fost fitate cu formula pentru energie (29) considerând a, b și c ca parametri liberi. Se observă ca energiile pentru benzile cu $K = 0$ depind doar de a și o cantitate constantă ce include ceilalți doi parametri. Calitatea foarte bună a fiturilor a fost folosită pentru clarificarea apartenenței unor stări la benzile vibraționale precum și pentru generarea de predicții referitoare la stările mai înalte. Parametrii obținuți prin fitarea nivelelor energetice au valori deosebite în cazul nucleelor critice. Am constatat astfel că nucleele critice au o dependență mult mai puternică a potențialului de energie, ceea ce face ca stările excitate să corespundă unor fluctuații mai rigide a suprafeței nucleare. O altă semnătură a caracterului critic ce reiese din rezultatele numerice ale modelului propus se referă la diferența foarte mare dintre deformarea din starea fundamentală și cea din banda γ . Acest aspect poate fi interpretat ca o coexistență a două forme cu secvențe rotaționale distincte construite pe acestea. Testarea supremă a modelului a constat în compararea tranzițiilor electromagnetice experimentale cu cele calculate cu ajutorul formalismului teoretic folosind parametrii fixați din fitul energiilor. Acordul bun cu experimentul obținut la comparația spectrelor energetice este păstrat și în acest caz.

În final, formalismul teoretic cât și aplicațiile numerice au fost prezentate într-o lucrare ce este în curs de evaluare. Rezultatul teoretic principal a fost eliminarea unor probleme ale abordărilor anterioare, cum ar fi posibilitatea descrierii nucleelor critice cu un potențial exact separabil nefiind astfel necesară separarea adiabatică dintre fluctuațiile β și γ . Din punctul de vedere al descrierii sistemelor nucleare, modelul oferă o îmbunătățire majoră în ceea ce privește reproducerea stărilor din banda β . Acest lucru se datorează folosirii teoriei potențialelor dependente de energie la fluctuațiile variabilei β . Nu în ultimul rând trebuie menționat și acordul fără precedent al rezultatelor teoretice cu cele experimentale obținute pentru numeroase stări aparținând la trei benzi diferite.

Pentru îndeplinirea obiectivelor etapei au fost realizate integral toate activitățile necesare:

1. Documentarea referitor la starea curentă a subiectului.
2. Identificarea aspectelor cheie ce trebuiesc urmate și a rezultatelor originale ce ar trebui obținute.

3. Delegarea sarcinilor fiecărui membru și stabilirea lanțului de colaborare.
4. Confruntarea aportului fiecărui membru la formalismul analitic.
5. Scrierea de noi programe de calcul.
6. Crearea de teste pentru rezultatele numerice și efectuarea calculelor.
7. Colectarea datelor experimentale recente și confruntarea acestora cu predicțiile teoretice.
8. Editarea lucrărilor științifice.
9. Diseminarea rezultatelor prin participarea la manifestări științifice

Articole publicate cu acknowledgement:

1. R. Budaca and A. I. Budaca, *Coexistence, mixing and fluctuation of nuclear shapes*, Europhysics Letters **123**, 42001 (2018).
2. R. Budaca, *Semiclassical description of chiral geometry in triaxial nuclei*, Physical Review C **98**, 014303 (2018).
3. P. Baganu, R. Budaca, and A. I. Budaca, *Bohr Hamiltonian with a potential having spherical and deformed minima at the same depth*, EPJ Web of Conference **194**, 01007 (2018).

Articole în curs de evaluare:

1. A. I. Budaca and R. Budaca, *Description of critical point nuclei within an energy dependent geometric model*.

Conferințe:

1. *Wobbling phase transition in odd mass nuclei*, R. Budaca, XI. International Conference on Nuclear Structure Properties (NSP2018), 12-14 Septembrie, 2018, Trabzon, Turcia.
2. *Proton emission with a generalized electrostatic barrier*, A. I. Budaca, R. Budaca, XI. International Conference on Nuclear Structure Properties (NSP2018), 12-14 Septembrie, 2018, Trabzon, Turcia.
3. *Bohr Hamiltonian with a potential having spherical and deformed minima at the same depth*, P. Baganu, R. Budaca, A. I. Budaca, International Conference "Nuclear Structure and Related Topics" (NSRT18), 3-9 Iunie, 2018, Burgas, Bulgaria.
4. *Nuclear shapes for the critical point of the $U(5) - SU(3)$ nuclear shape phase transition*, P. Baganu, R. Budaca, A. I. Budaca, Shapes and Symmetries in Nuclei: from Experiment to Theory (SSNET'18 Conference), 5-9 Noiembrie, 2018, Gif-sur-Yvette, Franța.